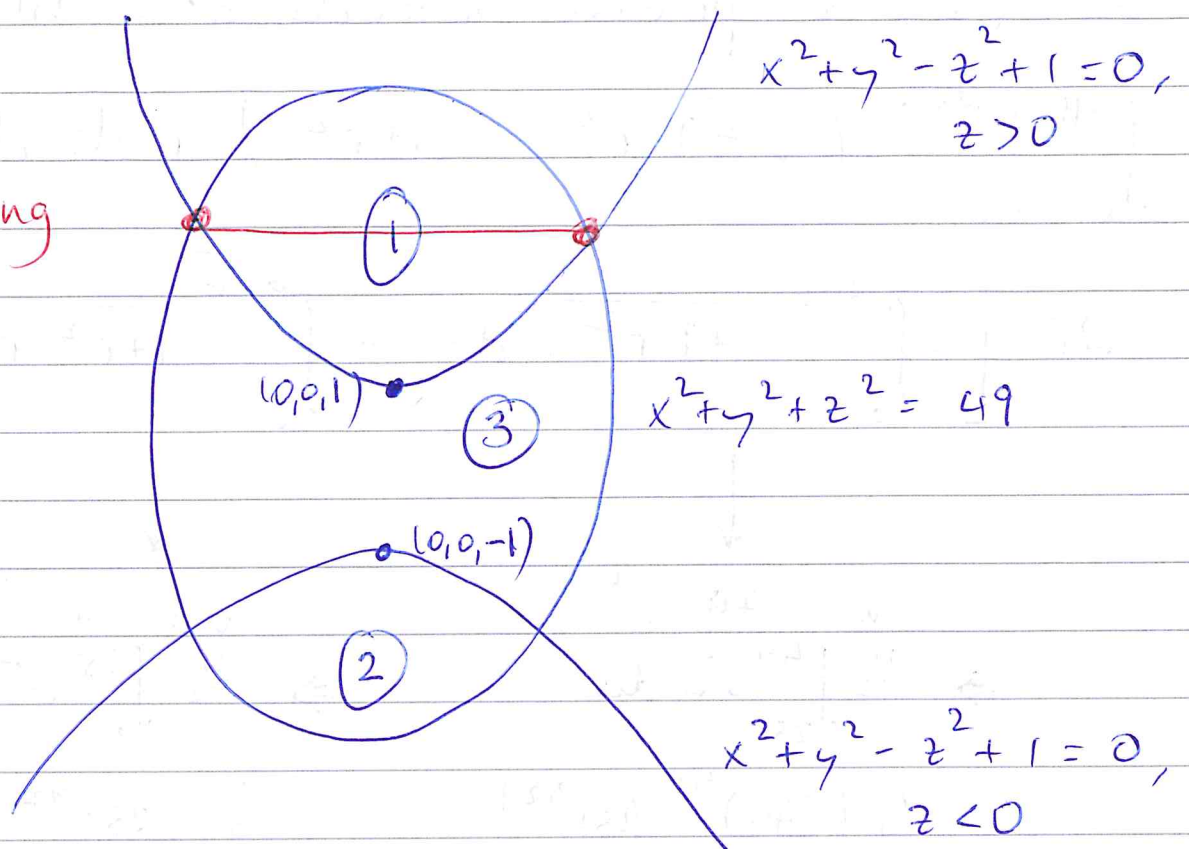


8.4

skärning



Klart av symmetriskhet att vol ① = vol ②
Så vi beräknar vol ①.

2+1 lösning :

$$\text{vol}(D) = \iint_{\pi(D)} dx dy \int_{z=\sqrt{1+x^2+y^2}}^{z=\sqrt{49-x^2-y^2}} dz$$

$$= \iint_{\pi(D)} \left(\sqrt{49-x^2-y^2} - \sqrt{1+x^2+y^2} \right) dx dy \quad (1)$$

Vid skärning : $z = \sqrt{49-x^2-y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$
 $\Rightarrow 49 - R^2 = 1 + R^2$
 $\Rightarrow R = 2\sqrt{6} \rightarrow$

Så (1) i polära koordinater blir:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{6}} (\sqrt{49-r^2} - \sqrt{1+r^2}) r dr d\theta$$

$$= 2\pi \left[\int_0^{2\sqrt{6}} \sqrt{49-r^2} r dr - \int_0^{2\sqrt{6}} \sqrt{1+r^2} r dr \right]$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ u &= 49 - r^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{25}^{49} \sqrt{u} du \end{aligned}$$

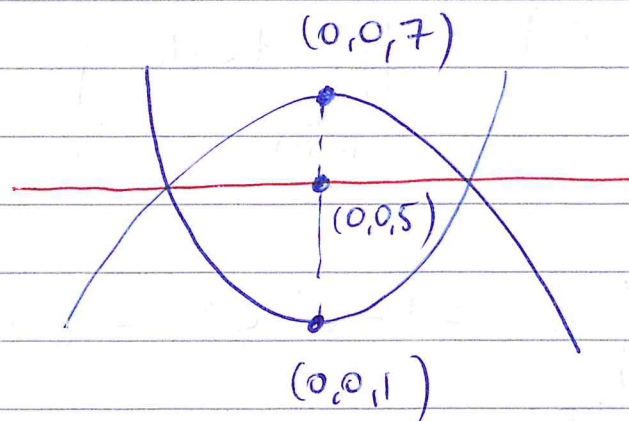
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \left((49)^{3/2} - (25)^{3/2} \right) \\ &= \frac{1}{3} (343 - 125) \\ &= \frac{218}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ v &= 1 + r^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \int_1^{25} \sqrt{v} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \left((25)^{3/2} - 1^{3/2} \right) \\ &= \frac{1}{3} (125 - 1) \\ &= \frac{124}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} (218 - 124) = \frac{188}{3} \pi.$$

1 + 2 lösning



Vid skärning : $r = 2\sqrt{6}$ (från tidigare)
 $\Rightarrow z = \sqrt{1+r^2} = 5$

$$\text{vol}(D) = \int_1^7 A(z) dz$$

$$= \int_1^5 A(z) dz + \int_5^7 A(z) dz$$

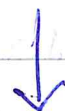


Här gäller på
randen att

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow A(z) = \pi r^2 \\ = \pi(z^2 - 1)$$



Här gäller på
randen att

$$x^2 + y^2 + z^2 = 49$$

$$\Rightarrow r^2 = 49 - z^2$$

$$\Rightarrow A(z) = \pi r^2 \\ = \pi(49 - z^2)$$

$$\Rightarrow \text{vol}(D) =$$

$$\pi \left[\int_1^5 (z^2 - 1) dz + \int_5^7 (49 - z^2) dz \right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{125}{3} - 5 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + \left(343 - \frac{343}{3} \right) - \left(245 - \frac{125}{3} \right) \right]$$

$$= \dots = \frac{188}{3} \pi$$

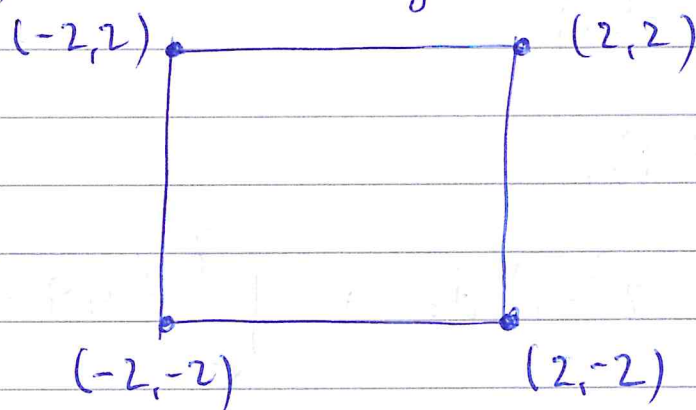
8.8

2+1 lösning

Området, som vi kallar D , begränsas nedåt av xy -planet så

$$z \geq 0 \Rightarrow x^2 = 4 - 4z \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2$$
$$y^2 = 4 - 4z \leq 4 \Rightarrow |y| \leq 2$$

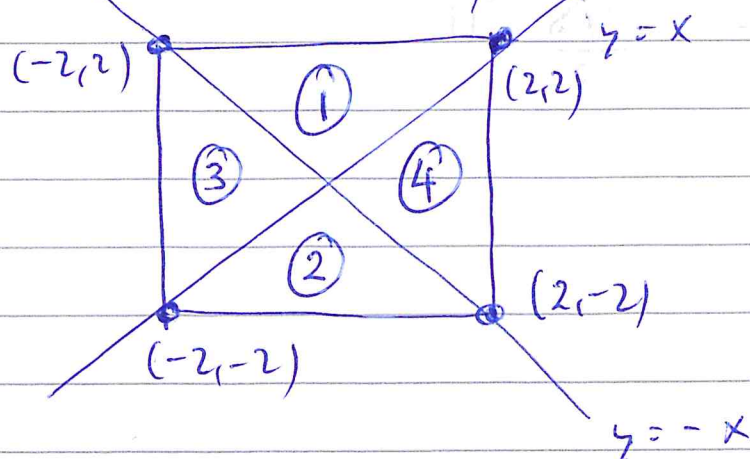
Så $\pi(D)$ är rektangeln (kvadraten)



Cylinderna korsar då

$$x^2 = 4 - 4z = y^2 \Rightarrow x = \pm y$$

$\pi(D)$



Klart av symmetriskäl att $\text{vol}(\text{D})$ därmed delas upp i 4 lika stora delar, ①, ②, ③, ④.

Ovanför områdena ①, ② är $y^2 = 4 - 4z$ den begränsande cylindern

Ovanför områdena ③, ④ är $x^2 = 4 - 4z$ den begränsande cylindern

$$\text{Så: } \text{vol}(\text{D}) = 4 * \text{vol}(\text{④})$$

$$= 4 * \iint_{\text{④}} dx dy \int_{z=0}^{z=1-x^2/4} dz$$

$$= 4 * \int_0^2 dx \int_{-x}^x dy \left(1 - x^2/4\right)$$

$$= 4 * \int_0^2 2x \left(1 - x^2/4\right) dx$$

$$= 4 * \left[x^2 - x^4/8 \right]_0^2$$

$$= 4 * (4 - 2) = 8.$$



1+2 lösning

$$x^2 = 4 - 4z \geq 0 \Rightarrow z \leq 1$$

Också $z \geq 0$ ty xy -planet begränsar D neråt

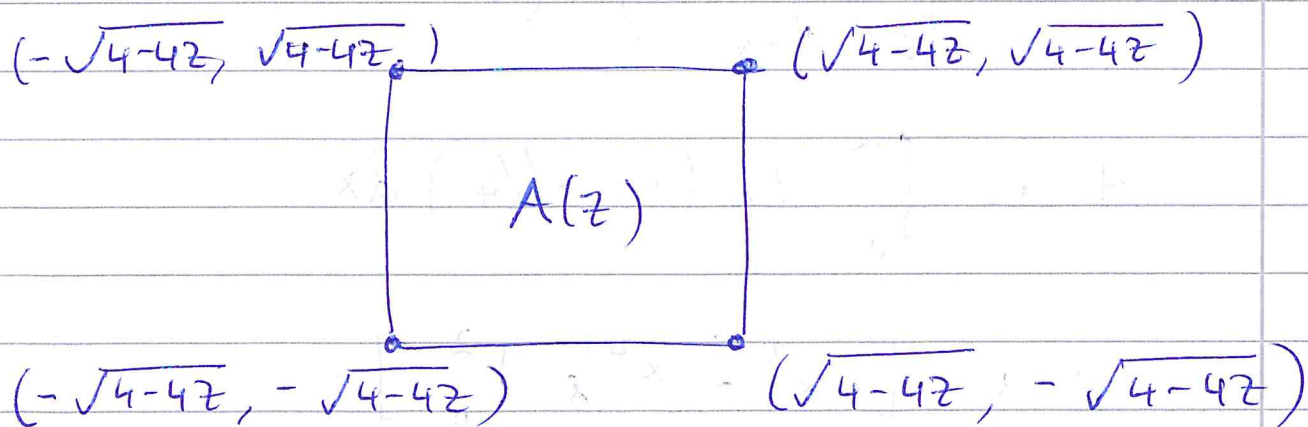
$$\Rightarrow \text{vol}(D) = \int_0^1 A(z) dz$$

För fixt z korsar cylindrarna vid

$$x^2 = 4 - 4z = y^2$$

$$\Rightarrow x = \pm y = \pm \sqrt{4 - 4z}$$

Alltså en rektangel (kvadrat) med
sidolängd $2\sqrt{4 - 4z}$



$$\begin{aligned} \Rightarrow A(z) &= (2\sqrt{4-4z})^2 = 4(4-4z) \\ &= 16(1-z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{vol}(D) = 16 \int_0^1 (1-z) dz = 16 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 8.$$

8.39 (b)

Bara Volymen

2+1 lösning

Området D är given som området mellan 2 funktionsgrafer

$$f(x,y) \leq z \leq g(x,y)$$

$$\text{där } f(x,y) = \sqrt{|x| + y^2}$$

$$g(x,y) = 1$$

$$\Rightarrow \text{vol}(D) = \iint_{\pi(D)} dx dy \int_{z=\sqrt{|x|+y^2}}^{z=1} dz$$

$$= \iint_{\pi(D)} dx dy (1 - \sqrt{|x| + y^2})$$

$$= \iint (1 - \sqrt{|x| + y^2}) dx dy$$

$$\{(x,y): \sqrt{|x| + y^2} \leq 1\}$$

Av symmetriskäl så är den totala volymen fyra gånger den i första kvadranten

$$\Rightarrow 4 * \iint (1 - \sqrt{x + y^2}) dx dy$$
$$\{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x + y^2} \leq 1\}$$

$$= 4 * \int_0^1 dy \int_0^{(1-y^2)^2} (1 - \sqrt{x} - y^2) dx$$

$$= 4 * \int_0^1 dy \left[x - \frac{2}{3} x \sqrt{x} - y^2 x \right]_{x=0}^{x=(1-y^2)^2}$$

$$= 4 * \int_0^1 dy \left[(1-y^2)^2 - \frac{2}{3} (1-y^2)^3 - y^2 (1-y^2)^2 \right]$$



förenklas till

$$(1-y^2)(1-y^2)^2 - \frac{2}{3} (1-y^2)^3$$

$$= \frac{1}{3} (1-y^2)^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \int_0^1 (1-y^2)^3 dy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) dy$$

$$= \frac{4}{3} \left(1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{64}{105}$$

1+2 lösning

$0 \leq z \leq 1$ gäller i området D

$$\Rightarrow \text{vol}(D) = \int_0^1 A(z) dz,$$

där $A(z) = \text{Area} \{ (x,y) \mid \sqrt{x} + y^2 \leq z \}$

* Notera att (a)-uppgiften var att beräkna $A(t)$

$$A(z) = \iint_{\{(x,y): \sqrt{x} + y^2 \leq z\}} 1 \, dx \, dy$$

Av symmetrihäl är den totala arean 4 ggr den i första kvadranten

$$\Rightarrow 4 * \iint_{\{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + y^2 \leq z\}} dx \, dy$$

$$= 4 * \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_0^{(z-y^2)^2} dx$$

$$= 4 * \int_0^{\sqrt{z}} (z - y^2)^2 dy$$

$$= 4 * \int_0^{\sqrt{z}} (z^2 - 2zy^2 + y^4) dy$$

$$= 4 * \left[z^2 y - \frac{2}{3} z y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{z}}$$

$$= 4 * \left[z^{5/2} - \frac{2}{3} z^{5/2} + \frac{1}{5} z^{5/2} \right]$$

$$= \frac{32}{15} z^{5/2}$$

→

$$\Rightarrow \text{vol}(D) = \int_0^1 A(z) dz$$

$$= \frac{32}{15} \int_0^1 z^{5/2} dz$$

$$= \frac{32}{15} \cdot \frac{2}{7} = \frac{64}{105}$$