

Sammanfattning av läsvecka 1

Flervariabelanalys

Melwin Andersson & Josef Jörgensen & Charbel Nemer &
Viktor Sundström & Nicolas Söderberg & Jacob Westberg

10 februari 2021

1 Differentiering

1.1 Funktioner i flera variabler

En funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ där $n, m \in \mathbb{N}$ kan beskrivas på tre sätt beroende på n och m .

$m = 1$: Skälervärd funktion av n variabler.

$m \geq 1$: Vektorvärd funktion.

$m = n$: Vektorfält i n dimensioner, $n \leq 3$.

Ett viktigt begrepp när man jobbar med flera variabler är normen. Normen av en vektor $\mathbf{x}$ skrivs $\|\mathbf{x}\|$ och kan ses som vektorns längd. Normen beräknas enligt

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

1.2 Differentierbarhet

Att en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i en variabel är deriverbar i en punkt a kan skrivas

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\rho(h),$$

där $\rho(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$ och där vi förutsätter att f är definierad i en omgivning kring a . Det är värt att notera att $f'(a) = A$ är en konstant. Denna formel kan generaliseras till två dimensioner genom

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h, k),$$

där $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. För godtyckligt antal dimensioner kan ekvationen skrivas

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h}),$$

där $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Om denna ekvation, kallad linjäriseringsformeln, uppfylls för någon konstant vektor $\mathbf{A}$ och någon funktion $\rho(\mathbf{h})$ sägs f vara differentierbar i punkten $\mathbf{a}$. Direkt av definitionen syns att f är kontinuerlig i $\mathbf{a}$ om den är differentierbar, ty $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \rightarrow 0$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

1.3 Partiella derivator och klassen $\mathcal{C}$

För att undersöka förändringstakten hos en funktion som varierar med 2 eller fler variabler så kan man undersöka hur funktionen varierar om alla utom en variabel hålls fixa. På så sätt delas förändringen upp i partiella derivator som enkelt kan beräknas med metoder från envariabelanalys. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av två variabler som är differentierbar. Då skrivs $f(x, y)$ s partiella derivator i punkten (a, b) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) &= f_x(a, b), \text{ } y \text{ är konstant och } f \text{ deriveras m.a.p. } x, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) &= f_y(a, b), \text{ } x \text{ är konstant och } f \text{ deriveras m.a.p. } y.\end{aligned}$$

Om samtliga partiella derivator till en funktion finns inom dess definitionsmängd så säger man att funktionen är partiellt deriverbar.

Ett annat sätt att kontrollera om en flervariabelfunktion är differentierbar är att visa att alla partiella derivator finns och är kontinuerliga i funktionens definitionsmängd då konstanterna i vektorn $\mathbf{A}$ i formeln är de partiella derivatorna.

Låt $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beteckna en funktion av n variabler där alla dess partiella derivator är definierade och kontinuerliga i området D , då kan man säga att funktionen $f \in \mathcal{C}^1(D)$, f är av klassen $\mathcal{C}^1$ i D . Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har kontinuerliga partiella derivator och de partiella derivatorna i sig har kontinuerliga partiella derivator tillhör f klassen $\mathcal{C}^2$. På samma sätt beskriver $\mathcal{C}^n$ att en funktion är partiellt deriverbar n gånger med kontinuerliga partiella derivator.

1.4 Clairauts sats

För funktioner av flera variabler finns flera partiella derivator, därav finns det ingen entydig derivata av högre ordning utan ett flertal som säger olika saker om funktionens beteende. Exempelvis, antag att f är en två gånger partiellt deriverbar funktion, isåfall finns de fyra partiella derivatorna

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

En naturlig fråga som uppstår är i vilka fall $f_{xy} = f_{yx}$, svaret på detta ges av Clairauts sats:

$$f \in \mathcal{C}^n(D) \Rightarrow f_{x_i^c x_j^d} = f_{x_j^d x_i^c}, \quad \forall c + d \leq n.$$

I ord, om alla f :s partiella derivator av ordning n i en domän D är kontinuerliga kommuterar partiell derivering upp till ordning n . Satsen kan antingen bevisas genom att först bevisa den för $n = 2$ genom att med hjälp av medelvärdessatsen visa att de två partiella derivatorna f_{xy} och f_{yx} är lika, sedan kan induktion användas för att bevisa det för godtyckligt n . Alternativt kan bevisiden med medelvärdessatsen för $n = 2$ användas för att bevisa satsen för godtyckligt n .

1.5 Tangentplan till en differentierbar funktion

Något geometriskt intressant som kan göras med en differentierbar funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är att ta bort feltermen i dess linjärisering och skriva

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k. \quad (1)$$

Detta är en approximation som beskriver ett plan som tangerar grafen till f i punkten $(a, b, f(a, b))$. För att tydligare se det sätts $x_0 = a$, $y_0 = b$, $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, $z = f(x, y)$ och $z_0 = f(x_0, y_0)$, vilket gör att (1) kan skrivas

$$z \approx z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - y_0).$$

Med likhet, vilket infinner sig i gränsovergången $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, alltså då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, kan ett plan definieras med ekvationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Denna ekvation beskriver tangentplanet till grafen till f i punkten $(a, b, f(a, b))$, vilket kan jämföras med hur derivatan kan användas för att beskriva tangenten till grafen till en funktion av en variabel i någon punkt. Det kan även utläsas att $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$ är en normalvektor till tangentplanet.

1.6 Gradienten

Gradienten kan betraktas som flervariabelanalysens motsvarighet till envariabelanalysens derivata.

Definition 1 (Gradient). Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar. Då är gradienten till $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ en funktion $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sådan att

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

1.7 Rikttningsderivator och nivååtor

Definition 2 (Rikttningsderivator). Rikttningsderivatan längs med vektor $\mathbf{v}$ i punkten $\mathbf{x}$ ges av

$$f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Då de partiella derivatorna oftast är betydligt lättare att beräkna än enskilda gränsvärden längs med olika rikttningsvektorer, så används oftast följande sats för att beräkna rikttningsderivator.

Sats 1 (Beräkning av rikttningsderivator). Om f är differentierbar i $\mathbf{x}$ kan rikttningsderivatan längs med en vektor $\mathbf{v}$ beräknas med

$$f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla f \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},$$

där $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ är enhetsvektorn längs med $\mathbf{v}$.

Definition 3 (Nivååtor). Givet $f : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ så är ekvationen $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = C$ i allmänhet en N -dimensionell hyperyta i $\mathbb{R}^{N+1}$.

Notera att inte alla ekvationer på den formen kommer att generera någon form av hyperyta, exempelvis finns det inga reella tal som uppfyller $x^2 + y^2 = -1$. Ekvationen $f(\mathbf{x}) = C$ fixerar en av de $N + 1$ variablerna vilket gör att den endast har N frihetsgrader. Då $N = 1$ kallas $f(x, y) = C$ nivåkurva, $N = 2$ nivåyta och för $N > 2$ hyperyta.

Sats 2 (Om gradientens storlek). Om en funktion är differentierbar i en punkt $\mathbf{x}$ kommer den öka mest i riktning av $\nabla f(\mathbf{x})$, och då med magnituden $\|\nabla f(\mathbf{x})\|$ på rikttningsderivatan. På samma sätt kommer rikttningsderivatan vara noll ortogonalt mot $\nabla f(\mathbf{x})$.

Bevis. Betrakta en generell enhetsvektor $\mathbf{e}$. Enligt sats 1 ges då rikttningsderivatan i den riktningen av $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$, vars storlek kan skrivas om med hjälp av definitionen av skalärprodukt till $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos(\theta)$, där θ är vinkeln mellan enhetsvektorn och gradienten. Magnituden maximeras sålunda då $\cos(\theta)$ är som störst, vilket sker precis då $\theta = 0$. På samma sätt är uttrycket 0 då $\theta = \pi/2$. $\square$

Ett sammanfattande exempel på definitionerna och satserna ovan är nivåkurvan $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$. Denna kan skrivas om som $z(x, y) = x^2 + y^2$, gradienten ges då av $\nabla z = (2x, 2y)$, beräknat i exempelvis $(x, y) = (1, 0)$ ger detta $\nabla z(1, 0) = (2, 0)$, det vill säga att gå vinkelrätt från cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ ökar funktionen mest, däremot kommer z förbli 1 då (x, y) ökas i riktningen $(0, 1)$, det vill säga vinkelrätt mot gradienten.

2 Kedjeregeln

2.1 Kedjeregeln i en variabel

Sats 3. Låt $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbara funktioner. Betrakta a som en inre punkt i g 's definitionsmängd D_g och $g(a)$ som en inre punkt i f 's definitionsmängd D_f . Då är den sammansatta funktionen $f \circ g$ definierad som $f(g(a))$ och dess derivata är $f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

2.2 Sammansättningar i flera variabler

Låt nu $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sammansättningen är bara definierad när $p = q$. Sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är definierad för en punkt $\mathbf{a}$ inom definitionsmängden för g så att $g(\mathbf{a})$ tillhör f 's definitionsmängd.

2.3 Kedjeregeln i flera variabler

För skalärvärda funktioner (alltså $m = 1$) gäller följande. Vid derivering av funktioner av flera variabler finns det ett allmänt utseende för kedjeregeln. Det delas upp i två specialfall och sedan det allmänna fallet. Första fallet är då $p = 1$ och n är godtyckligt. Andra fallet är när $n = 1$ och p är godtyckligt och tredje fallet är då både p och n är godtyckliga.

Betrakta fall 1 då $p = 1$. Om villkoren som nämndes för att en sammansättning ska vara väldefinierad är uppfyllda och våra funktioner f och g är differentierbara så gäller följande: i en punkt $\mathbf{t}$ så är derivatan

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(\mathbf{t})) = f'(g(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial g}{\partial t_j}.$$

Beviset för detta är exakt samma som det för kedjeregeln i en variabel. För varje partiell derivata hålls allt utom den j :te variabeln konstant och sen deriveras funktionen m.a.p. t_j .

I nästa fall där $n = 1$ och p är godtyckligt så ser kedjeregeln ut enligt följande:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \sum_{k=1}^p f'_{x_k}(\mathbf{g}(t)) g'_k(t).$$

Beviset av detta går ut på att visa att ett visst gränsvärde för en differenskvot existerar. Likt tänket för definitionen av derivata i en variabel.

Slutligen har vi det tredje fallet där p och n är godtyckliga. Vi betraktar nu funktionen $f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))$, där $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $\mathbf{t}$ är en punkt i definitionsmängden till $\mathbf{g}$. Dessutom tillhör f och $\mathbf{g}$ klassen C^1 . Då får vi kedjeregeln med följande utseende:

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_n} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial t_n},$$

mer kompakt:

$$\nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_j}.$$

2.4 Praktiska tillämpningar, lösning av PDE

Ett vanligt förekommande problem inom fysiken och tillämpad matematik är lösningen av partiella differentialekvationer (PDE). Generell lösning till PDE, om den överhuvudtaget finns, är i regel mycket svår att hitta. I praktiska tillämpningar är det dock oftast en specifik lösning som sökes. Om denna lösning involverar något antagande om funktionen kan detta ofta förenkla lösning av PDE, i fallet med varibelsubstitutioner kan kedjeregeln användas för att underlätta problemet. Metoden kan visas med följande exempel

$$xf_x + yf_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Generell lösning till denna PDE är inte trivial att härleda, i en praktisk tillämpning kanske denna PDE uppkommer i ett problem med cyklisk symmetri, det vill säga

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g \circ r(x, y) \\ r(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Genom detta antagande kan de partiella derivatorna av f beräknas med kedjeregeln vilket ger

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial}{\partial x}(g \circ r(x, y)) = g'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = g'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ f_y &= \frac{\partial}{\partial y}(g \circ r(x, y)) = g'(r) \frac{\partial r}{\partial y} = g'(r) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Insättning av detta i den ursprungliga PDE:n ger

$$g'(r) \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + g'(r) \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

som kan förenklas till

$$g'(r) = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Detta har reducerat det relativt svåra fallet med en PDE till en trivial ordinär differentialekvation.