Demonstration 4

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2021

Dagens genomgång: 7.4, 7.15, 8.7, 8.31

Uppgift 7.4

Beräkna

$$\iiint_D \frac{z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2} \tag{1}$$

där $D = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

Lösning

Hur ser området ut?

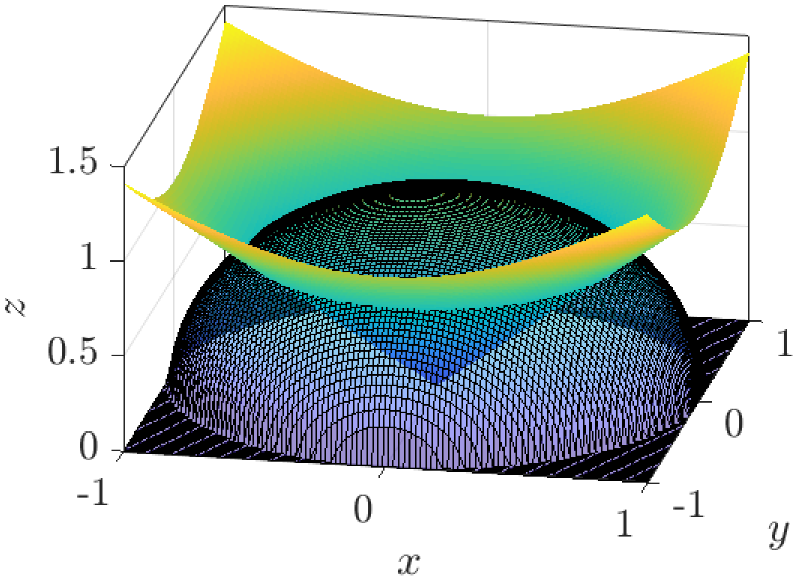
$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Området innanför enhetssfären.} \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} \quad &\Longrightarrow \quad \text{Lite klurigare! Låt oss undersöka saken.} \end{aligned} \tag{2}$$

För $z < 0$ finns det inga x, y som uppfyller andra olikheten.

För $z = 0$ uppfyller enbart $(x,y) = (0,0)$ andra olikheten.

För $z > 0$ kan vi skriva om andra olikheten till $z^2 \geq x^2 + y^2$. Vi får alltså en cirkel i xy-planet med radie z!

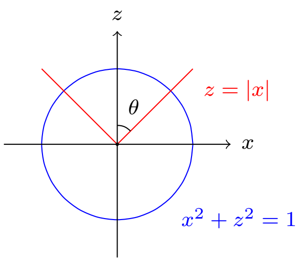
Likheten $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ger oss alltså en upp-och-ner-vänd kon med dess udd i origo, se Figur 1. Olikheten ges oss alltså alla punkter "innanför" denna kon.



Figur 1: De två områdena.

Hur ska vi hitta lämpliga gränser för vår integral då?

Eftersom området är symmetriskt i x, y, kan vi nöja oss med att studera området i xz-planet. Då har vi att $x^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq \sqrt{x^2} = |x|$.



Området kan alltså i sfäriska koordinater

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

beskrivas med gränserna

$$r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \tag{4}$$

Vi får då att vår integral är

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r}{1 + r^2 \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{r^3 \cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r}{1 + r^2\sin^2(\theta)}. \tag{5}$$

Glöm inte faktorn $r^2 \sin\theta$!

Vi kan nu notera att vår integral saknar φ-beroende. Vi kan alltså reducera den till en dubbelintegral,

$$I = 2\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3 \cos\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r}{1 + r^2 \sin^2(\theta)}. \tag{6}$$

Vidare kan vi notera att täljaren liknar derivatan (m.a.p. θ) av nämnaren. Vi provar att derivera ln av nämnaren,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln\big(1+r^2\sin^2(\theta)\big) = \frac{1}{1+r^2\sin^2(\theta)}\cdot 2r^2\sin\theta\cdot\cos\theta. \tag{7}$$

Genom att flytta runt konstanterna något kan vi alltså beräkna θ-integralen,

$$I = \pi\int_0^1 r \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+r^2\sin^2(\theta)}}_{\star}\,\mathrm{d}r. \tag{8}$$

Vi beräknar $\star$ separat,

$$\star = \Big[\ln\big(1+r^2\sin^2(\theta)\big)\Big]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(1+r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln(1) = \ln\left(1+\frac{1}{2}r^2\right). \tag{9}$$

Vi har alltså nu reducerat ned den sökta integralen till en envariabelintegral,

$$I = \pi\int_0^1 r\cdot\ln\left(1+\frac{1}{2}r^2\right)\,\mathrm{d}r = \left\{\begin{aligned} t &= 1+\frac{1}{2}r^2 \\ \mathrm{d}t &= r\mathrm{d}r \\ t &\in [1,3/2]\end{aligned}\right\} = \pi\int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Slutligen får vi alltså att

$$I = \pi\Big[t\ln(t) - t\Big]_1^{\frac{3}{2}} = \pi\left(\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - 1\ln(1) + 1\right) = \frac{\pi}{2}\left(3\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1\right). \tag{11}$$

Uppgift 7.15

Beräkna

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{12}$$

där $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Lösning

Vi skulle kunna försöka integrera med gränserna i kartesiska koordinater, $x, y, z \in (-\infty, \infty)$, men uppgiften uttryckligen skriker sfäriska koordinater, så låt oss pröva med dem! Vi får då

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r}\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r}\int_0^\pi \sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\ &= \underbrace{\int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r}_{\clubsuit}\cdot\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta}_{\heartsuit}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi}_{\spadesuit}. \end{aligned} \tag{13}$$

Vi har nu brutit ned integralen i tre oberoende envariabelintegraler. Vi ser direkt att $\spadesuit = 2\pi$. Integralen $\heartsuit$ är också ganska enkel,

$$\heartsuit = \Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2. \tag{14}$$

Den bökigaste integralen är ♣. Om man är bekant med Π-funktionen (eller Γ-funktionen) vet man att svaret är 1, men annars får man beräkna det med partiell integration,

$$\clubsuit = \left[-r\mathrm{e}^{-r}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r = 0 + \left[-\mathrm{e}^{-r}\right]_0^\infty = (-0) - (-1) = 1. \tag{15}$$

Den sökta integralen är alltså

$$I = \clubsuit \cdot \heartsuit \cdot \spadesuit = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi. \tag{16}$$

Volymen av en kropp

Volymen V av en kropp i område D ges av

$$V = \iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{17}$$

vilket ni kan tänka som att om vi summerar alla små volymer inuti D, utan att vikta dem med någon funktion (integranden), summerar de rimligen till den hela volymen.

Uppgift 8.7

Beräkna volymen av den kropp som begränsas av olikheterna

$$0 \le z \le 10 - x^2 - y^2, \quad x + 1 - y^2 \ge 0, \quad x + y^2 - 1 \le 0. \tag{18}$$

Lösning

Vi kan skriva om och sätta samman de två senare olikheterna till

$$y^2 - 1 \le x \le 1 - y^2. \tag{19}$$

Utöver att ge oss gränserna för x, ser vi också i detta uttryck att $y \in [-1, 1]$.

Den sökta volymen kan alltså skrivas

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \int_{y^2-1}^{1-y^2} \int_{0}^{10-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \int_{y^2-1}^{1-y^2} \left(10 - x^2 - y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\left(10 - y^2\right)x - \frac{1}{3}x^3\right]_{y^2-1}^{1-y^2} \mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} \left(\left(10 - y^2\right)\left(1 - y^2\right) - \frac{1}{3}\left(1 - y^2\right)^3\right)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{20}$$

Integranden I' kan vi förenkla något,

$$I' = 10 - 10y^2 - y^2 + y^4 - \frac{1}{3}\left(1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6\right) = \frac{29}{3} - 10y^2 + \frac{1}{3}y^6. \tag{21}$$

Vi kan alltså beräkna volymen att bli

$$V = 4\left[\frac{29}{3}y - \frac{10}{3}y^3 + \frac{1}{21}y^7\right]_0^1 = 4\left(\frac{29}{3} - \frac{10}{3} + \frac{1}{21}\right) = ... = \frac{536}{21}. \tag{22}$$

Uppgift 8.31

a) Beräkna volymen av den ändliga kropp K som begränsas av ytorna

$$z = 2 - x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad z = y^2. \tag{23}$$

b) Bestäm masscentrum $x_{\mathrm{mc}}, y_{\mathrm{mc}}, z_{\mathrm{mc}}$ för kroppen K. Masscentrums koordinater ges av

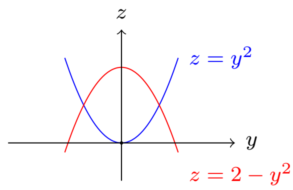
$$x_{\mathrm{mc}} = \frac{\iiint_K x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}{\iiint_K \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}, \quad y_{\mathrm{mc}} \text{ och } z_{\mathrm{mc}} \text{ analogt.} \tag{24}$$

Lösning a)

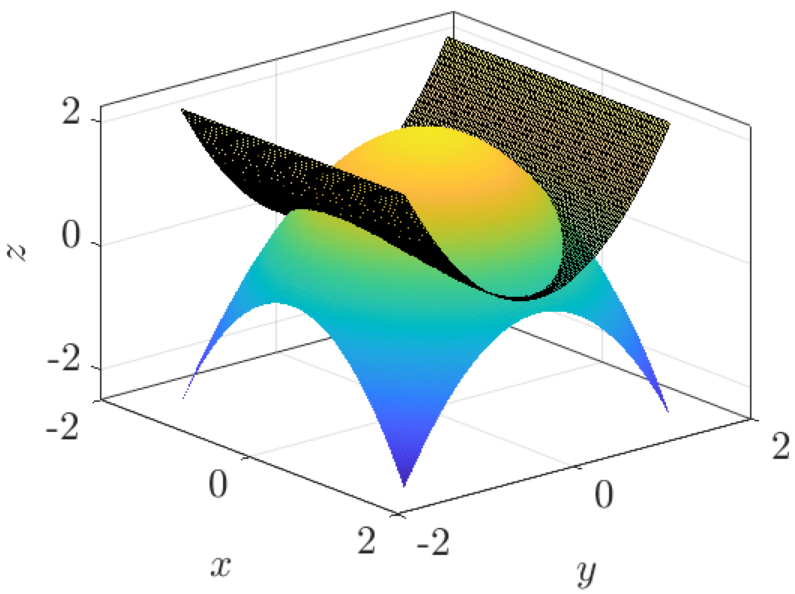
Vi börjar med att identifiera området.

$$\begin{aligned} z = y^2 \quad &\implies \quad \text{En } y = x^2\text{-kurva, fast i } yz\text{-planet.} \\ z = 2 - x^2 - y^2 \quad &\implies \quad \text{Lite klurigare! Låt oss undersöka saken.} \end{aligned} \tag{25}$$

Eftersom sambandet är symmetriskt i x, y, kan vi nöja oss med att studera området i yz-planet. Då har vi de två sambanden $z = y^2$ och $z = 2 - y^2$.



Om vi skissar detta i 3 dimensioner, får vi alltså något som liknar Figur 2.



Figur 2: De två ytorna.

Vi kan se att $z \in [y^2, 2 - x^2 - y^2]$, men hur hittar vi gränserna för x och y?

Vi har att

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = y^2 \end{cases} \implies y^2 = 2 - x^2 - y^2 \implies \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1 \tag{26}$$

vilket är en ellips i xy-planet, som vi enkelt kan uttrycka i polära koordinater,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \sqrt{2}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned} \tag{27}$$

Volymen kan alltså beräknas enligt

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_S \int_{y^2}^{2-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S \left(2 - x^2 - 2y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(2 - 2\rho^2\cos^2(\varphi) - 2\rho^2\sin^2(\varphi)\right)\sqrt{2}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho = \sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} \left(2\rho - 2\rho^3\right)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\sqrt{2}\left[\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^4\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Lösning b)

Vi kan egentligen direkt säga att $x_{\mathrm{mc}} = 0$ och $y_{\mathrm{mc}} = 0$, ty kroppen ligger symmetriskt runt z-axeln, men låt oss visa det matematiskt också!

Vi beräknar täljaren till x_{mc},

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{mc}}V &= \iiint_K x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_S x \int_{y^2}^{2-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_S x\left(2 - x^2 - 2y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\rho\cos\varphi\left(2 - 2\rho^2\cos^2(\varphi) - 2\rho^2\sin^2(\varphi)\right)\sqrt{2}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{=0}\int_0^1 \left(2\rho^2 - 2\rho^4\right)\,\mathrm{d}\rho = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Analogt får vi för y_{mc} att

$$y_{\mathrm{mc}}V = \iiint_K y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = ... = \sqrt{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{=0}\int_0^1\left(2\rho^2 - 2\rho^4\right)\,\mathrm{d}\rho = 0. \tag{30}$$

För z_{mc} får vi däremot

$$z_{\mathrm{mc}}V = \iiint_K z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_S \int_{y^2}^{2-x^2-y^2} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_S \underbrace{\left[z^2\right]_{y^2}^{2-x^2-y^2}}_{\diamondsuit}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{31}$$

Låt oss beräkna $\diamondsuit$ separat,

$$\diamondsuit = \left(2 - x^2 - y^2\right)^2 - y^4 = [\text{Konjugatregeln}] = \left(2 - x^2\right)\left(2 - x^2 - 2y^2\right), \tag{32}$$

så vi har att

$$\begin{aligned} z_{\text{mc}} V &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(2 - 2\rho^2 \cos^2(\varphi)\right)\left(2 - 2\rho^2 \cos^2(\varphi) - 2\rho^2 \sin^2(\varphi)\right) \sqrt{2}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - \rho^2 \cos^2(\varphi)\right)\left(1 - \rho^2\right) \rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\rho \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^1 \rho\left(1 - \rho^2\right) \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(1 - \rho^2 \cos^2(\varphi)\right) \mathrm{d}\varphi}_{I_\varphi} \, \mathrm{d}\rho. \end{aligned} \tag{33}$$

Låt oss nu beräkna I_φ separat,

$$I_\varphi = 2\pi - \rho^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi - \rho^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi - \pi\rho^2. \tag{34}$$

Vi fortsätter vår beräkning,

$$\begin{aligned} z_{\text{mc}} V &= 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 \rho\left(1 - \rho^2\right)\left(2 - \rho^2\right) \mathrm{d}\rho = 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 \left(2\rho - 3\rho^3 + \rho^5\right) \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\sqrt{2} \left[\rho^2 - \frac{3}{4}\rho^4 + \frac{1}{6}\rho^6\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) = 2\pi\sqrt{2}\frac{3+2}{12} = \pi\sqrt{2}\frac{5}{6} \end{aligned} \tag{35}$$

och alltså att $z_{\text{mc}} = 5/6$.

Masscentrum ligger alltså i $(0, 0, 5/6)$.