Föreläsningar #15,16 (3.1, 8.2 och lite från 9.1)

DEL I

KURVOR

Def Låt $a < b$ vara reella tal, $k \geq 0$ och $n \geq 1$ heltal. En funktion

$$\begin{aligned} \sigma : [a,b] &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \sigma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{aligned}$$

av klassen C^k kallas för en ~~C^k-kurva~~ parametriserad och orienterad C^k-kurva i $\mathbb{R}^n$.

Punkten $\sigma(a)$ kallas för kurvans startpunkt och $\sigma(b)$ dess slutpunkt

Kurvan sägs vara sluten om $\sigma(a) = \sigma(b)$

Kurvan sägs vara enkel om

$$a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow \sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$$

(Med ord: En enkel kurva korsar inte sig själv, förutom i slutet om den är sluten).

enkel, ej sluten — enkel + sluten — varken enkel el. sluten — sluten. ej enkel.

OBS! När man säga endast "kurva" så syftar man, rent formellt, endast på värdemängden $\Gamma([a,b])$ och tar ej hänsyn till parametriseringen eller orienteringen, dvs till hela funktionen Γ.

Dock är det vanligt att slarva med språket och säga bara "kurva" när en parametrisering och/eller orientering är underförstått.

Fysikalisk tolkning ($n \le 3$ kanske)

En partikel följer en bana mellan två punkter $A = \Gamma(a)$ och $B = \Gamma(b)$. $\Gamma(t)$ är partikelns position vid tid t.

Orienteringsbyte

Innebär att partikeln följer exakt samma bana i exakt samma takt fast baklänges (kör videon baklänges).

Formellt innebär det att vi ersätter funktionen $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ med funktionen $\$: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ där

$$\$(t) = \Gamma(b+a-t) \quad , \quad a \le t \le b$$

Parametriseringsbyte

dvs samma värdemängd

Innebär att vi behåller samma kurva
och samma orientering, men ändrar tidsskalan eller behåller tidsskalan med ändrar γ. Så partikeln följer samma bana men i en annan tidsintervall, eller i samma tidsintervall men på ett annat vis.

Formellt Två C^k-funktioner

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$
$$\delta : [c, d] \to \mathbb{R}^n,$$

där $a \leq b$ och $c \leq d$ är reella tal, sägs vara (olika) parametriseringar av samma orienterade C^k-kurva om

- Det finns en bijektiv C^k-funktion $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ s.a.

(i) $\varphi(a) = c$ och $\varphi(b) = d$

(ii) φ är växande : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$

(iii) $\forall t \in [a, b] : \gamma(t) = \delta(\varphi(t))$.

Alla är parametris-eringar av samma orienterade C^k-kurva

Ex:

$$\gamma_1(t) = (t, t) \qquad 0 \leq t \leq 1$$
$$\gamma_2(t) = (t-1, t-1) \qquad 1 \leq t \leq 2$$
$$\gamma_3(t) = (t/2, t/2) \qquad 0 \leq t \leq 2$$
$$\gamma_4(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t}) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Hastighet, Fart & Acceleration

Notera hur jag slarvar med språket. Det kommer att förbli så

__Def 1__ Låt $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-kurva, och låt $t \in [a,b]$.
$r'(t)$ kallas för __hastigheten__ vid tid t och $\|r'(t)\|$ kallas för __farten__ vid tid t

(English : hastighet = velocity
fart = speed)

__Def 2__ Låt $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^2-kurva och låt $t \in [a,b]$.
$r''(t)$ kallas för __accelerationen__ vid tid t.

Längd

Låt nu $r = r(t)$ vara en C^1-kurva.

- Hastighetsvektorn $r'(t)$ är alltid tangent till kurvan och i "positiv riktning", dvs i samma riktning som kurvans orientering
- I en infinitesimal tid dt så följer en partikel sträckan

$$dr = r'(t)\, dt$$

Kan också skriva $d\mathbf{r}$

och därmed en infinitesimal längd

$$ds = \| d\mathbf{r} \| = \| \mathbf{r}'(t) \| \, dt$$

ds kallas <u>längdelementet</u> på kurvan

Om $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ då ges kurvans totala längd av:

$$\boxed{L = \int_a^b ds = \int_a^b \| \mathbf{r}'(t) \| \, dt} \quad (1)$$

• <u>Proposition</u> (Ex. 3, s. 123-4 i boken)

Längden av en C^1-kurva är väldefinierad, dvs är oberoende av valet av parametrisering eller orientering.

<u>Bevis</u> Det är klart att längden är oberoende av orientering, så betrakta en annan C^1-parametrisering av samma kurva

$$\mathbf{s} : [c, d] \to \mathbb{R}^n,$$

där $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ är motsvarande C^1-avbildning som uppfyller (i), (ii), (iii).

I den nya parametriseringen skulle kurvlängden ges av

$$L^* = \int_c^d \| \$'(s) \| \, ds$$

$$\overset{(iii)}{=} \int_a^b \| \$'(\varphi(t)) \| \frac{d\varphi(t)}{dt} \, dt$$

Med $\$'$ menar vi $d/ds \; \$$. Alltså, Kedjeregeln innebär att

$$\frac{d}{dt} \$(\varphi(t)) = \$'(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

$$\Rightarrow \quad L^* = \int_a^b \left\| \frac{d/dt \; \$(\varphi(t))}{d\varphi(t)/dt} \right\| \frac{d\varphi(t)}{dt} \, dt$$

Men $\frac{d\varphi(t)}{dt} \geq 0$ enligt (ii) så vi får kancellation utan $\pm$ tecken $\Rightarrow$

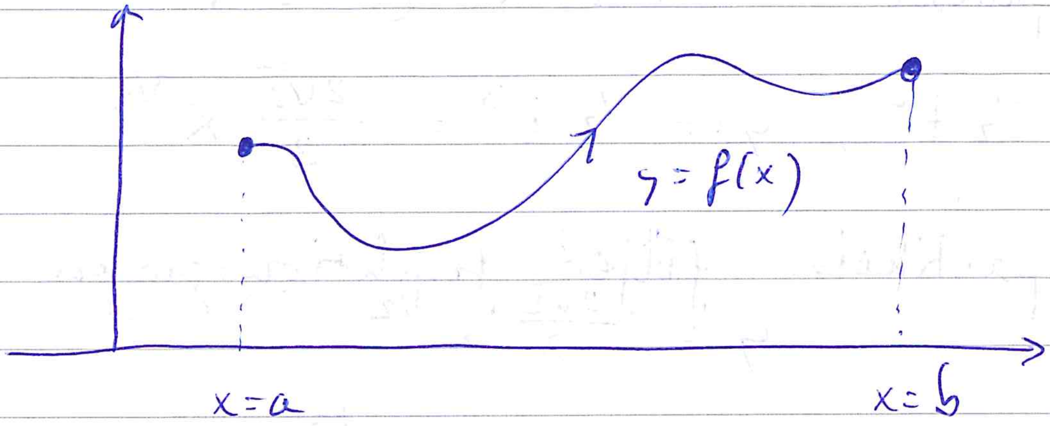
$$L^* = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \$(\varphi(t)) \right\| dt$$

$$\overset{(iii)}{=} \int_a^b \| \pi'(t) \| \, dt = L,$$

v.s.v.

• Specialfall:

Kurvan hör till en funktionsgraf i $\mathbb{R}^2$



Den naturliga parametriseringen här är

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto \mathbf{r}(x) = (x, f(x))$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(x) = d/dx\, \mathbf{r}(x) = (1, f'(x))$$
$$\Rightarrow \|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$
$$\Rightarrow \boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx} \quad (2)$$

Ex. 1 En partikel följer banan

$$\mathbf{r}(t) = (1/2\, t^2, 1/3\, t^3), \quad 0 \le t \le 1$$

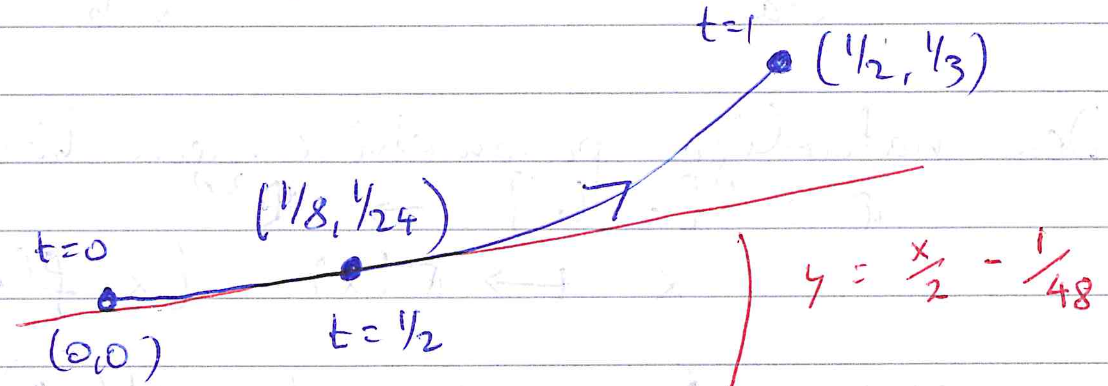
(i) Skissa banan
(ii) Bestäm partikelns hastighet, fart och acceleration @ $t = 1/2$
(iii) Bestäm banans längd.

Lösning

Startpunkt : $(0,0)$ @ $t=0$
Slutpunkt : $(1/2, 1/3)$ @ $t=1$

$$x := \tfrac{1}{2} t^2, \quad y := \tfrac{1}{3} t^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$$

Så partikeln följer funktionsgrafen $y = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$



$$r'(t) = (t, t^2) \overset{t=1/2}{=} (1/2, 1/4) \quad \text{Hastighet}$$
$$\|r'(t)\| = \sqrt{t^2+t^4} \overset{t=1/2}{=} \sqrt{1/4 + 1/16} = \frac{\sqrt{5}}{4} \quad \text{Fart}$$

$$r''(t) = (1, 2t) \overset{t=1/2}{=} (1,1) \quad \text{Acceleration.}$$

$$L = \int_0^1 \|r'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^2+t^4}\, dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\, dt \overset{u=1+t^2}{=} \tfrac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\, du = \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

OBS! Längden kan i stället beräknas med formel (2) där $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \sqrt{2}\, x^{1/2} = \sqrt{2x}$

$$\Rightarrow \quad L = \int_{x=0}^{x=1/2} \sqrt{1+(\sqrt{2x})^2}\, dx$$

$$= \int_0^{1/2} \sqrt{1+2x}\, dx \overset{u=1+2x}{=} \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\, du$$

$$= 1/3\,(2\sqrt{2}-1).$$

Ex. 2 Bestäm längden av kurvan

$$\gamma = \{ r(t) = (\cos t, \sin t, 1/2\, t^2) \mid 0 \leq t \leq 2\pi \}$$

Lösning: Notera att γ är en sorts uppåtgående spiral kring z-axeln som dras ut mer och mer då tiden går.

$r'(t) = (-\sin t, \cos t, t)$

$\Rightarrow \quad \|r'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$

$$\Rightarrow \quad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

Poängen med detta exempel är att bekanta er med en något svårare men ändå standard envariabelsintegral

$\longrightarrow$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C$$

Alltså:

$$L = \left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Skalärprodukt (se s. 125)

Proposition 1 Låt $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ vara C^1-kurvor i $\mathbb{R}^n$. Då gäller:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$$

Bevis: $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i(t)\,v_i(t)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(u_i(t)\,v_i(t)\right)$$

$$\overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{i=1}^{n} u_i'(t)v_i(t) + u_i(t)v_i'(t)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i'(t)v_i(t) \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(t)v_i'(t) \right)$$

$$= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \quad \blacksquare$$

Fysikalisk Tillämpning

Kom ihåg att den kinetiska energin av en partikel med massa m och fart v är $\frac{1}{2} m v^2$.

Säg att partikeln följer C^1-kurvan

$$\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \leftarrow \text{OBS! } n = 3$$

Förändring i kinetisk energi

$$= \tfrac{1}{2} m (\text{slutfart})^2 - \tfrac{1}{2} m (\text{startfart})^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m \|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \tfrac{1}{2} m \|\mathbf{r}'(a)\|^2$$

$$\overset{\text{Kalk Fund Sats}}{=} \tfrac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}'(t)\|^2 \, dt$$

$$\overset{v \cdot v = \|v\|^2}{=} \tfrac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \right) dt$$

$\longrightarrow$

$\underline{\underline{\text{Prop. 1}}}$ $\frac{1}{2} m \int_a^b \left(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) + \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \right) dt$

$= m \int_a^b \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$

$= \int_a^b \left(m\mathbf{r}''(t) \right) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$

$\overset{\text{Newtons}}{\underset{\text{2a lag}}{=}} \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt,$

där $\mathbf{F}$ är den sammanlagda kraften som partikeln upplever (partikeln sägs "falla fritt").

En integral på formen

$$\int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt$$

längs en C^1-kurva i $\mathbb{R}^n$, där $\mathbf{F}(t)$ är ett n-dimensionellt C^1-vektorfält, kallas för en <u>kurvintegral</u> eller <u>arbetsintegral</u>.

Vi kommer att ägna mycket tid åt kurvintegraler i Lv 6, 7 (Kap. 9, 10).

En fysiker skulle alltså sammanfatta denna uträkning såhär:

"Om en partikel faller fritt i ett kraftfält då gäller att arbetet som kraften uträttar är lika med förändringen i partikelns kinetisk energi".

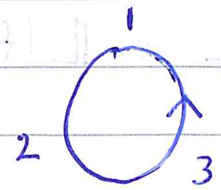
Kryssprodukt (se Ex. 4, s. 125-6)

Proposition 2 Låt $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ vara C^1-kurvor i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)\right) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

Bevis Kan bevisas på liknande vis som Prop. 1. Kom ihåg att

$$(u \times v)_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$$
$$(u \times v)_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$$
$$(u \times v)_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$



$$u \times v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Fysikalisk tillämpning

Def 1 En partikels <u>vinkelmomentum</u> ges av

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$$

där
- $\vec{r}$ är ortsvektorn m.a.p. en förutbestämd origo, m.a.o. $\vec{L}$ är dess vinkelmomentum m.a.p. just den punkten
- $\vec{v}$ är partikelns hastighet
- $\vec{p} = m\vec{v}$ är dess s.k. (linjär) <u>momentum</u>

Def 2 En partikel sägs följa en <u>centralrörelse</u> kring en punkt O om kraften som den upplever är alltid riktad mot O.

Säg nu att en partikel följer en centralrörelse kring en punkt O och att $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ anger dess position m.a.p O vid tid t.

Fysikaliskt kan vi anta att $\mathbb{r} \in C^1$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(t) = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\mathbb{r}(t) \times \mathbb{r}'(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{L}(t) = m\frac{d}{dt}(\mathbb{r}(t) \times \mathbb{r}'(t))$$

$\longrightarrow$

$$\overset{\text{Prop. 2}}{=} m\left(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}''(t)\right)$$

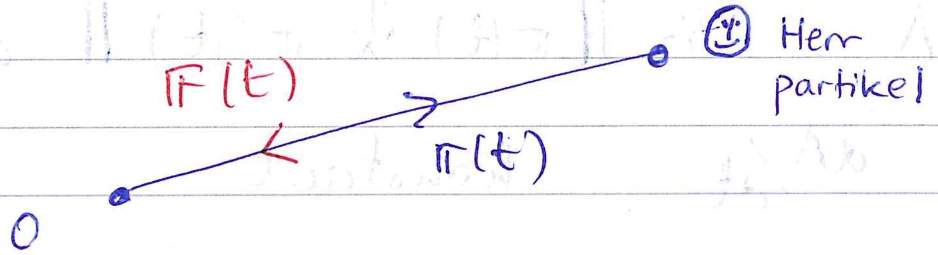
$\downarrow$

$= 0$, kryssprodukten av en vektor med sig själv alltid noll

$$= \mathbf{r}(t)\times\left(m\mathbf{r}''(t)\right)$$

$$\underset{\text{2a lag}}{\overset{\text{Newton}}{=}} \mathbf{r}(t)\times\mathbf{F}(t)$$

Men centralrörelse medför att $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{F}(t)$ är alltid anti-parallella



$\Rightarrow$ även deras kryssprodukt är noll

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Partikeln har konstant vinkelmomentum

Notera två konsekvenser:

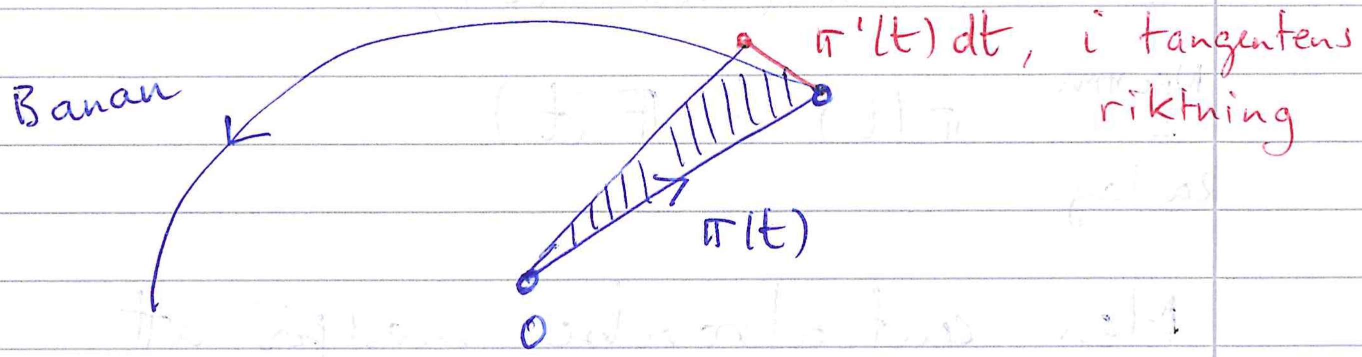
(1) $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)\right) = 0 \Rightarrow$

$\vec{r} \times \vec{v}$ är en fixt vektor

$\Rightarrow$ $\vec{r}, \vec{v}$ spänner upp ett fixt plan

$\Rightarrow$ Partikeln rör sig i ett plan (A)

(2) Tag en infinitesimal tid dt



Arean av den infinitesmala triangeln

$$dA = \tfrac{1}{2} \| r(t) \times r'(t) \| \, dt$$

$\Rightarrow$ dA/dt = konstant

dvs: Partikeln svepar ut en area kring centralpunkten i konstant takt (B)

(A) + (B) går under namnet <u>keplers lag</u> för centralrörelser.

DEL 2 : YTOR

Def Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd, $k \geq 0$ och $n \geq 2$ heltal. En C^k-funktion

$$\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^n$$

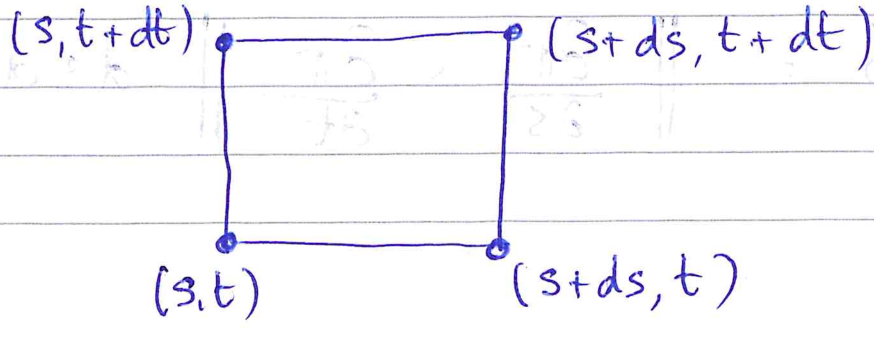
kallas för en parametriserad C^k-yta.

OBS! Man kan också make:a sense av "orientering" för ytor, men vi återkommer till detta senare.

I denna kurs håller vi oss till $n=3$, alltså ytor i rummet.

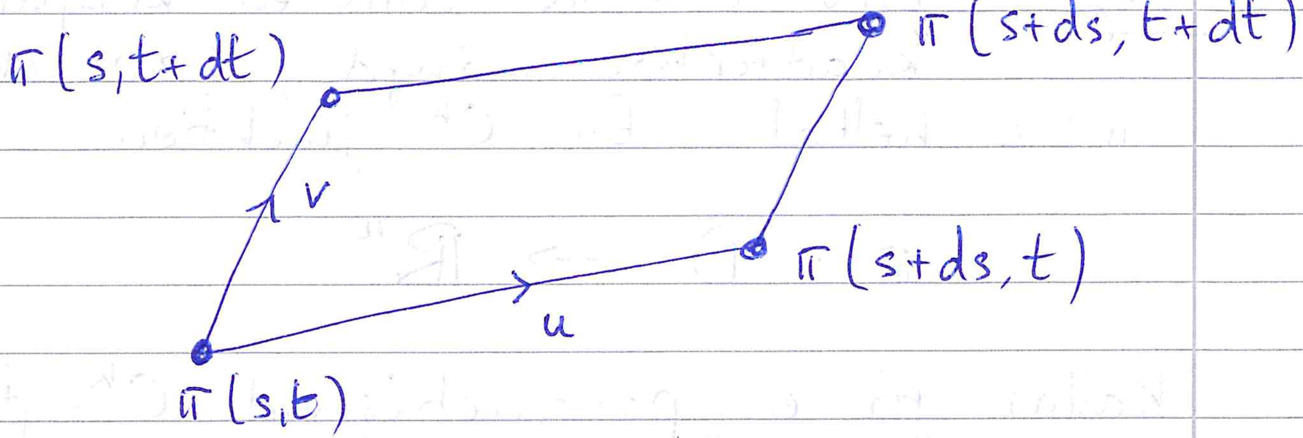
Notation :
$$\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$$
$$(s,t) \mapsto \mathbf{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

Ytarea Tag en infinitesimal axelparallell rektangel i definitionsmängden D



$\longrightarrow$

Via $\mathbf{r}$ avbildas detta på något infinitesimalt parallellogram



Parallellogrammets area är det s.k. <u>areaelementet</u> på ytan; betecknas dS

$$\Rightarrow \quad dS = \| \vec{u} \times \vec{v} \|$$

$$\vec{u} = \mathbf{r}(s+ds, t) - \mathbf{r}(s,t)$$

$$\overset{\text{linjär}}{\underset{\text{isering}}{=}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t)\, ds$$

OBS!

Vi förutsätter nu att $\mathbf{r} \in C^1$

$$\vec{v} = \mathbf{r}(s, t+dt) - \mathbf{r}(s,t)$$

$$\overset{\text{linjär}}{\underset{\text{isering}}{=}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds\, dt}$$

(1)

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ytarean} = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds\,dt}$$

av en parametriserad C^1-yta

Specialfall 1. Ytan är en del av en funktionsgraf:

$$Y = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,\ z = f(x,y)\}$$

Den naturliga parametriseringen är då:

$$\mathbf{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, f_x) \ ; \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, f_y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ytarean} = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\ dx\,dy}$$

(2)

Specialfall 2. Nivåyta till en funktion av 3 variabler

→

$$Y = \{ (x,y,z) \mid F(x,y,z) = C \, , \, (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2 \}$$

Antag att $F_z \neq 0$ på hela ytan.

IFS $\Rightarrow$ $z = f(x,y)$ där

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} \, , \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Insättning in i (2) $\Rightarrow$

$$\text{Ytarean} = \iint_{D = \pi(Y)} \sqrt{\frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2} + 1} \; dx\,dy$$

$$= \iint_{\pi(Y)} \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{|F_z|} \, dx\,dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ytarean} = \iint_{\pi(Y)} \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} \, dx\,dy}$$

(3), ej i boken

Ex. 1 En sfär av radie r kring origo. Den naturliga parametriseringen är med de sfäriska koordinaterna θ, ϕ

$\longrightarrow$

$$\bar{r}(\theta, \phi) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$$

där $\left.\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow D = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ Sfärens area

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta\, d\phi$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(r^2\sin^2\theta\cos\phi,\ r^2\sin^2\theta\sin\phi,\ r^2\sin\theta\cos\theta\underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1}\right)$$

$$= r^2(\sin^2\theta\cos\phi,\ \sin^2\theta\sin\phi,\ \sin\theta\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} \right\| = r^2\sqrt{\sin^4\theta\cos^2\phi + \sin^4\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$\longrightarrow$

$$= r^2 \sqrt{\sin^4\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= r^2 \sqrt{\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= r^2 \sqrt{\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}$$

$$= r^2 \sin\theta$$

Alltså : $\boxed{dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}$

(vilket vi visste redan, ty

$$\begin{aligned} dV &= |J(\rho,\theta,\phi)| \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\ &= (\rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi) \, d\rho \\ &= dS \, d\rho \end{aligned}$$

)

och sfärens area blir

$$r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi r^2 \checkmark$$

Ex. 2 (se 3.7 i övningsboken)

Betrakta ytan som ges av

$$\left.\begin{aligned} x &= s\cos t \\ y &= s\sin t \\ z &= s^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 0 \le s \le 2 \\ 0 \le t \le 2\pi \end{aligned}$$

(i) Punkten $P = (0,1,1)$ ligger på ytan. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan i P.

<u>Lösning</u>: En normalvektor till ytan ges av

$$\vec{n} = \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos t & \sin t & 2s \\ -s\sin t & s\cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2s^2\cos t, \ -2s^2\sin t, \ s)$$

I punkten $(0,1,1)$ gäller

$$\left.\begin{aligned} 0 &= s\cos t \\ 1 &= s\sin t \\ 1 &= s^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} s &= 1 \\ t &= \pi/2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (0, -2, 1)$$
$$P = (0,1,1) = (x_0, y_0, z_0)$$

Tangent Planets ekvation blir:

$$0(x - x_0) - 2(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0$$
$$\Rightarrow -2(y-1) + (z-1) = 0$$
$$\Rightarrow -2y + z = -1$$

(ii) Bestäm ytarean

Lösning: Vi har i del (i) redan beräknat

$$\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} = (-2s^2\cos t,\ -2s^2 \sin t,\ s)$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right\| = \sqrt{4s^4(\cos^2 t + \sin^2 t) + s^2}$$

$$= s\sqrt{4s^2+1}$$

$$\text{Ytarean} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 s\sqrt{4s^2+1}\,ds\,dt$$

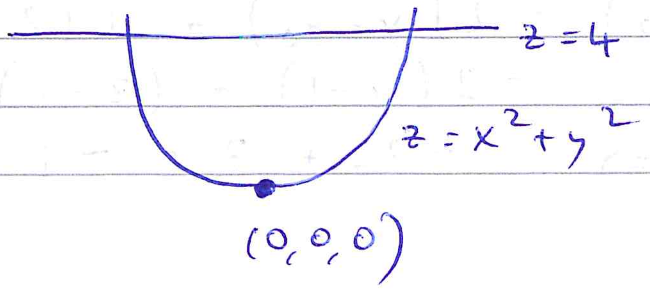
$$= 2\pi \int_0^2 s\sqrt{4s^2+1}\,ds$$

$$\overset{u=2s^2+1}{=} \pi/4 \int_1^9 \sqrt{u}\,du = \pi/6\,(9^{3/2} - 1^{3/2})$$

$$= \frac{26}{6}\pi = \frac{13}{3}\pi$$

OBS! Om man konstaterar att $z = x^2 + y^2$, dvs att ytan är en del av en paraboloid, så får man en alternativ lösningsprocedur.

Note: $0 \le s \le 2$ & $z = s^2 \Rightarrow 0 \le z \le 4$



$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

Lösning (i)

$$f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$$

$$f_x = 2x = 0$$

$$f_y = 2y = 2$$

$$\Rightarrow \quad 2(y-1) - (z-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2y - z = 1$$

Lösning (ii)

$$\text{Ytarean} = \iint_{\pi(Y)} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx\,dy$$

Vi får $\pi(Y)$ genom att sätta

$$z = 4 = x^2 + y^2$$

dvs $\pi(Y) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\Rightarrow \quad \text{Ytarea} = \iint_{\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} \, dx\,dy$$

$$\overset{\text{polära}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta,$$

vilket är exakt samma integral som tidigare, bara vi har bytt bokstäver.