

Tavelpresentation läsvecka 2

Jacob Billvén Annie Carlsson Sofia Damne
Axel Flordal Oscar Litorell Johan Wheeler

den 13 februari 2021

Sammanfattning

I denna rapport behandlas materialet presenterat under föreläsningarna under läsvecka 2 i kursen MVE035/MVE600 Flervariabelanalys, ledd av Peter Hegarty under läsperiod 3 år 2021. Inledningsvis presenteras Taylors sats i flera variabler. Därefter används satsen för klassificering av kritiska punkter. Slutligen utvidgas definitioner av differentierbarhet och linjärisering samt kedjeregeln till att gälla inte bara skalärvärda funktioner utan även vektorvärda.

1 Taylors sats

Detta avsnitt utvidgar Taylors sats från att gälla för en variabel till att gälla för ett godtyckligt antal variabler.

För funktioner av en variabel ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) säger Taylors sats att om $f \in C^{p+1}$ kan f skrivas som ett polynom på formen

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^p \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot h^j + O(h^{p+1}). \quad (1)$$

är polynomet det entydliga Taylor-polynomet av $f(a+h)$.

Från detta kan Taylor-polynomet av flervariabel-funktionen $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kring punkten (a, b) härledas genom att sätta

$$F(t) = f(a+th, b+tk). \quad (2)$$

Funktionen $F(t)$ är nu en funktion av endast en variabel, och kan med hjälp av Ekvation 1 Taylor-utvecklas kring $t = 1$. Detta ger

$$F(1) = f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^p \frac{(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^j f(a, b)}{j!} + O(\|(h, k)\|^{p+1}). \quad (3)$$

Genom att expandera differentialoperatorn $(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^j$ kan det skrivas om som

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a, b) \frac{h^i k^{j-i}}{i!(j-i)!} + O(\|(h, k)\|^{p+1}). \quad (4)$$

För att troliggöra att Ekvation 4 verkligen motsvarar funktionen f , kan vi tänka oss att vi deriverar den i gånger med avseende på x och $j-i$ gånger med avseende på y i punkten (a, b) , alltså där $(h, k) = (0, 0)$ och jämför med $\frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}$.

I det mer generella fallet $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skrivs $h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$ om som en skalärprodukt med $\mathbf{h}$ och operatorn ∇ , som definieras som $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{j=0}^p \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{a})}{j!} + O(\|\mathbf{h}\|^{p+1}) \quad (5)$$

2 Klassificering av kritiska punkter

Då definitionerna av kritiska (eller stationära) punkter i flervariabelanalys liknar dem för envariabelanalys så inleds detta avsnitt med definitionerna för en variabel.

2.1 Definitioner av kritiska punkter i envariabelanalys

Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av en variabel och $a \in \mathbb{R}$. Då gäller:

1. f sägs ha en kritisk punkt i $x = a$ om $f'(a) = 0$.
2. f sägs ha ett lokalt maximum (respektive minimum) i $x = a$ om $\exists \varepsilon > 0$ s.a. $f(x) \leq f(a)$ (respektive $f(x) \geq f(a)$) då $|x - a| < \varepsilon$.
3. Om f är deriverbar är varje lokalt minimum och maximum en kritisk punkt.
4. Om $f \in C^2$ och $x = a$ är en kritisk punkt för f gäller att
 - (a) $f''(a) > 0 \Rightarrow a$ är ett lokalt minimum
 - (b) $f''(a) < 0 \Rightarrow a$ är ett lokalt maximum
 - (c) $f''(a) = 0 \Rightarrow a$ är antingen ett lokalt maximum, minimum eller en terasspunkt. Det går alltså inte att avgöra karaktären av punkten med endast denna definition.

2.2 Definitioner av kritiska punkter i flervariabelanalys

Definitionerna för flervariabelanalys är modifieringar av definitionerna för envariabelanalys, då definitionerna bara utvidgats för att gälla för ett godtyckligt antal variabler.

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av n variabler där $f \in C^{p+1}$ och $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

1. f sägs ha en kritisk punkt i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ om $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
2. f sägs ha ett lokalt maximum (respektive minimum) i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ om $\exists \varepsilon > 0$ s.a. $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (respektive $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$) då $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$.
3. Om f är differentierbar är varje lokalt minimum och maximum en kritisk punkt.

En motsvarighet för definition 4 i envariabelanalys, vilken bestämmer karaktären av den kritiska punkten, ges mer utförligt i Avsnitt 2.3.

2.3 Bestämning av kritisk punkts karaktär i $\mathbb{R}^2$

För att bestämma en kritisk punkt (a, b) karaktär kan Taylor-utveckling användas där andra ordningens term har stor betydelse. Taylor-polynomet av grad två för funktionen $f(x, y) \in C^3$ i punkten (a, b) kan skrivas som:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) \approx f(a, b) &+ \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot k + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} \cdot hk + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} \cdot k^2 \right). \end{aligned} \quad (6)$$

I fallet att (a, b) är en kritisk punkt innebär det att första ordningens Taylor-term är $= 0 \forall (h, k)$ då $\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = 0$. Resultatet av detta är att Taylor-polynomet istället kan skrivas som:

$$f(a+h, b+k) \approx f(a, b) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} \cdot hk + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} \cdot k^2 \right). \quad (7)$$

I detta fall är det tydligt att funktionens värde runt punkten (a, b) beror på andra ordningens Taylor-term (eller högre), något som kan liknas med fallet i en variabel då tecknet på $g''(x)$ kan beskriva karaktären på en kritisk punkt.

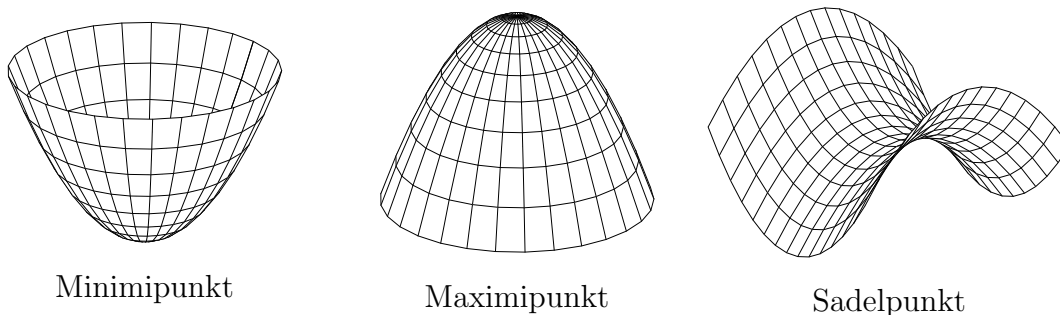
För att bestämma om en kritisk punkt är en maximi-, minimi- eller sadelpunkt kan vi studera följande binära kvadratiska form:

$$Q(h, k) = A \cdot h^2 + 2B \cdot hk + C \cdot k^2 \quad (8)$$

där A , B och C är konstanta koefficienter som i detta fallet är $A = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}$. Den binära kvadratiska formen kan tolkas med hjälp av fyra olika kriterier:

1. Om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0$ så är $Q(h, k) > 0 \forall (h, k) \neq (0, 0)$ (**positivt definit**) $\implies (a, b)$ är en **sträng lokal minimipunkt** för f .
2. Om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0$ så är $Q(h, k) < 0 \forall (h, k) \neq (0, 0)$ (**negativt definit**) $\implies (a, b)$ är en **sträng lokal maximipunkt** för f .
3. Om $AC - B^2 < 0$ så är $Q(h, k)$ både positivt och negativt för olika $(h, k) \neq (0, 0)$ (**indefinit**) $\implies (a, b)$ är en **sadelpunkt** för f .
4. Om $AC - B^2 = 0$ för något $(h, k) \neq (0, 0)$ så är $Q(h, k) = 0$ för något $(h, k) \neq (0, 0)$ (**semidefinit**). I detta fall kan (a, b) karaktär **ej bestämmas** från andra ordningens Taylor-term.

Som beskrivet i listan kan dessa kriterier användas för att bestämma karaktären på den kritiska punkten förutom i det semidefinita fallet. Detta kan liknas vid det endimensionella fallet då en kritisk punkts karaktär inte kan bestämmas om $g''(a) = 0$ utan ytterligare analys av funktionen krävs (exempelvis x^4), något som också gäller i detta fall. En tolkning av detta är att andra ordningens taylor-term inte längre är dominant i punkten (a, b) , vilket till exempel kan göra att högre ordningens termer inte kan bortses från och kan påverka betendet. Detta innebär att om $Q(h, k)$ är semidefinit kan (a, b) vara en maximi-, minimi- eller sadelpunkt och behöver bestämmas genom andra metoder.



Figur 1: Exempel på olika extrempunkter

3 Vektorvärda funktioner

Detta avsnitt utvidgar definitioner av differentierbarhet, linjärisering och kedjeregeln till att gälla även vektorvärda funktioner. En vektorvärd funktion definieras som

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (9)$$

där skillnaden jämfört med skalärvärda funktioner är att m tillåts vara skilt från 1. Funktionen $\mathbf{F}$ kan därför betecknas med m stycken skalärvärda funktioner F_i som

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)). \quad (10)$$

Med vektornotation kan detta även skrivas som

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}. \quad (11)$$

3.1 Differentierbarhet och linjärisering

Differentierbarhet för vektorvärda funktioner $\mathbf{F}$ definieras genom att $\mathbf{F}$ är differentierbar i punkten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ om samtliga skalärvärda komponenter F_i är differentierbara i $\mathbf{a}$. Att $F_i(\mathbf{a})$ är differentierbar innebär att den kan skrivas med linjäriseringsformeln som

$$F_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F_i(\mathbf{a}) + \nabla F_i(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \rho_i(\mathbf{a}), \quad (12)$$

där $\rho_i(\mathbf{a}) \rightarrow 0$ när $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

På motsvarande sätt kan linjäriseringen av $\mathbf{F}$ skapas genom att samla linjäriseringarna av samtliga F_i (Ekvation 12) i vektorer. Det ger att

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \begin{bmatrix} \nabla F_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \boldsymbol{\rho}(\mathbf{h}) \quad (13)$$

där $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}_m$ när $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$.

Då $\nabla F_i(\mathbf{a})$ i sin tur är en vektor av differentialoperatorer kan vektorn med samtliga $\nabla F_i(\mathbf{a})$ -komponenter skrivas som

$$\begin{bmatrix} \nabla F_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Denna matris kallas *funktionalmatrisen* av $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ och betecknas som $(D\mathbf{F})(\mathbf{a})$.

3.2 Kedjeregeln för vektorvärda funktioner

Under läsvecka 1 presenterades kedjeregeln för skalärvärda funktioner av flera variabler. I detta avsnitt kommer definitionen utvidgas till att gälla även sammansättningar av vektorvärda funktioner. Detta kommer göras genom utnyttjande av funktionalmatriser.

Definiera funktionerna $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ och en punkt $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, och betrakta sammansättningen $D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{t})$. Vi kommer nu härleda ett uttryck för funktionalmatrisen $D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})$. Detta görs genom att först studera en godtycklig skalärvärd funktion F_i i $\mathbf{F}$ och derivera den partiellt med avseende på ett godtyckligt element t_j i $\mathbf{t}$.

$$\frac{\partial}{\partial t_j} F_i(\mathbf{G}(\mathbf{t})) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial G_k}{\partial t_j}(\mathbf{t}) \quad (15)$$

Högerledet kan sedan tolkas som en skalärprodukt på formen

$$\nabla F_i(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_j}(\mathbf{t}). \quad (16)$$

Skalärprodukten kan vidare tolkas som en matrismultiplikation med matriserna

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_p}{\partial t_j} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t_j} F_i(\mathbf{G}(\mathbf{t})) = D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})_{ij}. \quad (17)$$

Nu kan vi undersöka funktionalmatriserna för $\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{t}))$ och $\mathbf{G}(\mathbf{t})$ och multiplicera dem, då får vi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial t_j} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_p}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial G_p}{\partial t_j} & \cdots & \frac{\partial G_p}{\partial t_n} \end{bmatrix} = A. \quad (18)$$

Enligt matrismultiplikation kommer A_{ij} vara rad i i $D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{t}))$ skalärt med kolonn j i $D\mathbf{G}(\mathbf{t})$, som vi vet är $D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})_{ij}$ från ekvation 17. Det betyder att

$$A_{ij} = D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})_{ij} \quad \forall i, j \Rightarrow \quad (19)$$

$$A = D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) \Rightarrow \quad (20)$$

$$D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{t}) = D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{t})) * D\mathbf{G}(\mathbf{t}). \quad (21)$$

3.3 Vektorfält i $\mathbb{R}^n$

Med hjälp av funktionalmatriser kan det bestämmas huruvida en funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är inverterbar. Funktionen $\mathbf{F}$ kan ses som ett n -dimensionellt vektorfält, och att $\mathbf{F}$ är inverterbar skulle innebära att vi kan applicera $\mathbf{F}^{-1}$ på en vektor given av $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n)$ för att åter erhålla $(x_1, \dots, x_n)$.

Undersökningen av inverterbarhet kommer grunda sig i linjäriseringen av $\mathbf{F}$ i en omgivning kring $\mathbf{F}(\mathbf{a})$, alltså

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{a}) + D\mathbf{F}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} \quad (22)$$

för ett fixt $\mathbf{a}$ och små $\mathbf{h}$. Notera att om vi förbiser konstanttermen $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ kan detta ses som en linjär avbildning, med funktionalmatrisen $D\mathbf{F}$.

För att $\mathbf{F}$ skall vara inverterbar krävs att den linjära avbildningen är inverterbar, alltså att matrisen $D\mathbf{F}(\mathbf{a})$ har en invers. Detta är ekvivalent med att determinanten för $D\mathbf{F} \neq 0$. Alltså att:

$$\begin{aligned} \det(D\mathbf{F}(\mathbf{a})) \neq 0 &\iff D\mathbf{F}(\mathbf{a}) \text{ är inverterbar} \\ &\iff \mathbf{F} \text{ är bijektiv i en omgivning kring } \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (23)$$

Med hjälp av sambandet ovan kan följande fås:

[Inversa Funktionssatsen] Låt $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ där $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} \in C^1$ samt $\mathbf{a}$ en punkt i $D(\mathbf{F})$ så att

$$\det(D\mathbf{F}(\mathbf{a})) \neq 0 \quad (24)$$

då finns öppna omgivningar U kring $\mathbf{a}$ och V kring $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ så att $\mathbf{F} : U \rightarrow V$ är bijektiv och dess invers $\mathbf{F}^{-1} : V \rightarrow U \in C^1$.

För satsen ovan skall det noggrant poängteras att $\mathbf{F}$ inte måste vara injektiv i hela $\mathbb{R}^n$ utan bara gäller lokalt.

Tack vare kedjeregeln och att determinanten är multiplikativ gäller också att funktionaldeterminanten $d\mathbf{F} = \det(D\mathbf{F})$ för en sammansatt funktion $d(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{x}) = d\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{G}(\mathbf{x})$.