

Tavelpresentationer grupp 3D

Sanna Berntsson
Harald de Blanche
Elsa Hansen
Tess Rimarcuk
Adrian Skobe
Oscar Stommendal

Februari 2021, senast redigerad 7/2-2021

1 Implicita funktionssatsen

Låt F vara en C^1 -funktion av n variabler och $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ vara en punkt där $F(x_1, \dots, x_n) = C$. Då gäller att om $\frac{\partial F}{\partial x_k} \neq 0$ så finns det en omgivning U av $\mathbf{a}$ så att restriktionen av nivåytan till U implicit definierar en C^1 -funktion av $n - 1$ variabler f_k och $x_k = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Vidare gäller:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{-F_{x_j}}{F_{x_k}}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\} \quad (1)$$

Bevis av (1): Om $F(x_1, \dots, x_n) = C$ där C är en konstant så ger derivering med avseende på x_j följande.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial C}{\partial x_j} \implies \frac{\partial C}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2)$$

Här kommer alla termer utom två att bli noll ty $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_j} = 0$ då $\alpha \neq j, k$. $\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 1$ och $\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ ty x_k kan skrivas som $f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Då får vi följande:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_n) = F_{x_j} \cdot 1 + F_{x_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = 0 \implies \frac{-F_{x_j}}{F_{x_k}} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \quad (3)$$

2 Integration i flervariabelanalys

En väsentlig skillnad från envariabelanalys är att man i flervariabelanalys inte kan använda sig av en så kallad antiderivata för att beräkna en definit integral. En sådan beräkning kan i envariabelanalys till exempel beskrivas enligt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

där derivatan av $F(x)$ är $f(x)$. Redan där stöter vi på problem när funktioner av flera variabler studeras. Detta eftersom funktioner av flera variabler inte har en derivata som är samma i alla riktningar i en viss punkt.

Vi börjar nu med att lite informellt beskriva hur man utför integration av funktioner av två variabler, $f(x, y)$. Eftersom graferna till dessa funktioner lever i $\mathbf{R}^3$ så kan dessa visualiseras, till skillnad från grafer som till exempel lever i $\mathbf{R}^4$. Låt nu D vara en kompakt (sluten, begränsad) och sammanhängande delmängd av $\mathbf{R}^2$. Då betecknas dubbelintegralen över D enligt:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (5)$$

Dubbelintegralen ovan definieras då lite informellt som en tecknad volym mellan grafen $z = f(x, y)$ och området D i xy -planet. Vi vill nu hitta och studera tekniker för att beräkna sådana dubbelintegraler.

Det finns fyra olika tekniker som kan vara användbara på olika sätt. Man kan dela in dem i inspektion, Fubinis sats, variabelbyten och integration med hjälp av nivåkurvor. Vissa utav exemplen som följer görs i $\mathbf{R}^3$ men teknikerna kan användas för ett godtyckligt antal variabler.

2.1 Inspektion

Inspektion bygger på att man utnyttjar utseendet på dubbelintegralen. Om man ser dubbelintegralen som en tecknad volym, kan man studera symmetrier samt utnyttja att integrationen är linjär. Att studera symmetrier innebär helt enkelt att man ser ifall man har volymer som antingen kancellerar varandra, eller som man vet är lika, och man behöver därmed bara beräkna delar av integralen. Att integrationen är linjär innebär att man kan utnyttja följande:

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy \quad (6)$$

2.2 Fubinis sats

För att formulera denna sats behöver vi först definiera begreppet axelparallell rektangel. Låt a, b, c, d vara reella tal och låt $a \leq b$ samt $c \leq d$. En delmängd $\Delta \subseteq \mathbf{R}^2$ på formen $\Delta = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ kallas då för en axelparallell rektangel. Vi är nu redo för satsen:

Låt a, b, c, d tillhöra $\mathbf{R}$ där $a \leq b$ och $c \leq d$. Låt vidare $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och $f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då gäller att:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) \quad (7)$$

Man håller i första fallet y konstant och integrerar från a till b med avseende på x , för att sedan integrera med avseende på y från c till d och vice versa i det andra fallet.

Vi ska nu se på Fubinis sats för så kallade reguljära områden, där vi gör följande definition. Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$ vara en kompakt mängd. Då gäller:

- i. D sägs vara reguljärt i x -led om D kan delas upp i ändligt många delar $D_1, D_2, \dots, D_m$ så att varje D_i har formen $D_i = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$, där $\alpha_i(x)$ och $\beta_i(x)$ är C^1 -funktioner av x och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x)$ då $x \in [a, b]$.
- ii. På samma sätt sägs D vara reguljärt i y -led om x och y byter plats i (i).
- iii. D sägs vara reguljärt om D är reguljärt i både x - och y -led. Observera då att en axelparallell rektangel är ett specialfall, eftersom x då ligger mellan a och b , och $\alpha_1(x) = c$ och $\beta_1(x) = d$.

Med detta kan vi formulera satsen.

Låt $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, där $\alpha, \beta \in C^1$. Låt vidare $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ vara kontinuerlig. Då gäller:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) \quad (8)$$

2.3 Variabelbyten i dubbelintegraler: Sats 6.4.6

Låt $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$ vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet sådan att $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ i E . Då är:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (9)$$

om funktionerna under integraltecknet är integrerbara över respektive område.

Variabelbyten kan med hjälp av Sats 6.4.6 användas för att beräkna dubbelintegraler. Enklast blir det om man kan skriva om de gamla variablerna, x och y , i termer av de nya variablerna, u och v . Då kan funktionsdeterminanten $\left(\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\right)$ beräknas och sättas in i ekvation (9). Därefter är det brukligt att använda sig av Fubinis sats, så det är viktigt att ha rätt gränser för u och v när D översätts till E .

Ekvationen visar på förhållandet mellan oändligt små areor i xy -planet och uv -planet. Man utgår från dem gamla variablerna x, y och skapar C^1 -funktionerna $x = g(u, v)$ och $y = h(u, v)$ och utifrån linjäriseringen av dessa får man uttrycken $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ och $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$. I matrisform får man, efter matrismultiplikation, uttrycken:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (10)$$

där $\det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) = J(u, v)$ och där $|J(u, v)|$ är den approximativa areaförstoringen, dvs. beloppet av funktionsdeterminantens värde i punkten (u, v) .

2.4 Integration med hjälp av nivåkurvor: Sats 29

Låt $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ vara en C^1 -funktion av två variabler, $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vara en C^0 -funktion av en variabel och $D \subseteq \mathbf{R}^2$ en kompakt, kvadrerbar mängd. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b, \forall (x, y) \in D$ och sätt $A(u) := \text{Area}(\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\})$. Då gäller:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du. \quad (11)$$

Idén med satsen liknar den i Fubinis. I den senare delas den infinitesimala tecknade volymen upp i skivor längs x - eller y -axeln. Här skivar man istället längs g 's nivåkurvor. Man vill jämföra två nivåkurvor, en där $g(x, y) = u$ och en annan när $g(x, y) = u + du$. Den infinitesimala arean mellan nivåkurvorna blir $dA(u)$, alltså $A'(u)du$, och höjden $h(g(x, y))$ är "konstant ovanför $g(x, y) = u$ ". Detta medför i sin tur att den infinitesimala tecknade volymen är $h(u)A'(u)du$ och att den slutgiltiga integralen blir $\int_a^b h(u)A'(u)du$. Satsen gör därmed att beräkningen av dubbelintegralen har återförts på beräkning av en enkelintegral. För att denna formeln ska vara till någon hjälp måste man lätt kunna räkna ut areafunktionen $A(u)$ och detta gör att metoden endast kan användas i speciella situationer, vanligtvis måste området D begränsas delvis av någon utav g 's nivåkurvor. Man måste även försäkra sig om att integranden är en sammansatt funktion på formen $h \circ g$ av en variabel.

3 Generaliserade dubbelintegraler

Generaliserade dubbelintegraler expanderar användningsområdet för dubbelintegraler genom att möjliggöra integration av obegränsade funktioner och över obegränsade områden. För att en dubbelintegral ska benämnas som generaliserad måste den komma på formen

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (12)$$

där

- i. $f(x, y)$ är en obegränsad funktion i ett begränsat område D , eller
- ii. D är ett obegränsat område

Idéerna bakom beräkningen om integralen över huvud taget existerar går att dela in i två fall:

- i. Man närmar sig de punkter där $f \rightarrow \pm\infty$ genom att klippa av mindre och mindre delar av området D och integrerar normalt över resterande D . Existerar ett gränsvärde för dessa integraler är detta värdet av dubbelintegralen.
- ii. Man integrerar över större och större delar av området D . Om dessa integraler går mot ett visst gränsvärde är detta värdet på dubbelintegralen.

Vid beräkning av generaliserade dubbelintegraler befinner man sig som regel i en sits där ett av följande resultat från envariabelanalys måste användas.

Fall 1:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^t dx = \begin{cases} +\infty & \text{när } t \leq -1 \\ \text{annars ändlig och lika med } \frac{1}{t+1} \end{cases}$$

Fall 2:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N x^t dx = \begin{cases} +\infty & \text{när } t \geq -1 \\ \text{annars ändlig och lika med } \frac{-1}{t+1} \end{cases}$$

3.1 Exempel på fall 2

Detta är en formel som är skriven av Carl Friedrich Gauss, och den berör följande integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Detta är en integral av en variabel, men då e^{-x^2} saknar en lättskriven antiderivata blir den svår att beräkna. För att beräkna integralen så behöver vi beräkna en integral över ett oändligt område för en funktion i två variabler. Sätt:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

(Detta gäller då i de två integralerna så har vi bara bytt tecken från x till y och alltså måste de vara lika). Då fås:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Här använder vi Fubinis sats baklänges, byter till polära koordinater där $r \in [0, \infty)$ och $\theta \in [0, 2\pi]$ samt använder variabelbytet $u = r^2$ vilket ger $2r dr = du$. Detta medför

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi. \end{aligned}$$

Detta ger oss att $I = \sqrt{\pi}$

3.2 Teori för dubbelintegraler över axelparallella rektanglar

Definition 1:

Låt $a \leq b$ vara reella tal. En uppdelning, s.k. *partition*, av det slutna intervallet $[a, b]$ är en ändlig följd $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Givet $a \leq b$, $c \leq d$ och uppdelningarna

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{aligned} \tag{13}$$

delas den axelparallella rektangeln $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ in i $m \times n$ st delrektanglar på formeln $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ där $i = 0, \dots, n-1$ och $j = 0, \dots, m-1$. Dessa delrektanglar överlappar i kanterna, men kanterna har total area 0.

Definition 2:

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel. En funktion $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ benämns som en *trappformad funktion* om det existerar uppdelningar enligt:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{aligned} \tag{14}$$

så att Φ har ett konstant värde för alla halvöppna delrektanglar $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

Definition 3:

Den tredje definitionen bygger vidare på de två föregående och beskriver dubbelintegralen som en *summa*. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ en trappformad funktion med avseende på indelningar enligt $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ och $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$. Sätt också c_{ij} till det konstanta värdet av Φ på delrektangeln $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$, med $i = 0, \dots, n-1$; $j = 0, \dots, m-1$. Villkoren ger följande definition av en dubbelintegral som en summa av axelparallella rätblock:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \tag{15}$$

Definitionen gäller för alla partitioner av dubbelintegralen så länge värdet på Φ är konstant på varje delrektangel i partitionen.

Definition 4:

Den fjärde definitionen berör *integrerbarhet* för funktioner av två variabler över axelparallella rektanglar. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ vara en begränsad funktion av två variabler. Funktionen f sägs vara integrerbar över Δ om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ på Δ så att:

- i. $\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta$ (begränsningen av f)
- ii. $\iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy - \iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy < \epsilon$ (för att talet ϵ ska ses som godtyckligt)

Utifrån de två villkoren ovan definieras dubbelintegralen av f över Δ som:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \sup_{\Phi \leq f} \iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy = \inf_{\Psi \geq f} \iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy \quad (16)$$

där approximationen av dubbelintegralen blir mer korrekt ju fler rektanglar man integrerar över.

4 Huvudsats: Satser 6.1.2 och 6.1.3

Huvudsatsen säger att om vi har en axelparallell rektangel $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och en kontinuerlig funktion $f : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$, så gäller:

- i. f är integrerbar över Δ
- ii. båda de itererade enkelintegralerna $\int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right)$ och $\int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right)$ existerar
- iii. $\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right)$ (Fubinis sats)

4.1 Bevis av i.

Beviset kan delas in i två steg, där ”steg 1” är att hitta trappfunktioner Φ och Ψ där f punktvis är neråt respektive uppåt begränsad på Δ , och ”steg 2” är att visa att skillnaden mellan dubbelintegralerna av dessa begränsningar inte överskrider ett litet tal ϵ . Förutsättningarna, f är kontinuerlig och Δ är en kompakt mängd (ty slutet och begränsad), gör att f är likformigt kontinuerlig. Beviset tar alltså avstamp i att f är likformigt kontinuerlig, och utvecklas med teori för dubbelintegraler över axelparallella rektanglar tillsammans med Weierstrass sats från förra analyskursen. Weierstrass sats säger att det finns minst ett största respektive minsta värde för en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd.

4.2 Bevis av ii.

Hann inte med på föreläsningen.

4.3 Bevis av iii.

Vi vill visa att oavsett om f är kontinuerlig eller ej, så gäller (iii.) för en godtycklig integrerbar f som uppfyller (ii.). Allt som allt så är det tillräckligt att visa att om Φ och Ψ är trappfunktioner där $\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y)$, så gäller:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy \leq \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx \leq \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx \, dy, \quad (17)$$

ty ”det är uppenbart” att Fubinis sats gäller för trappfunktioner.