Föreläsning #17 KURVINTEGRALER

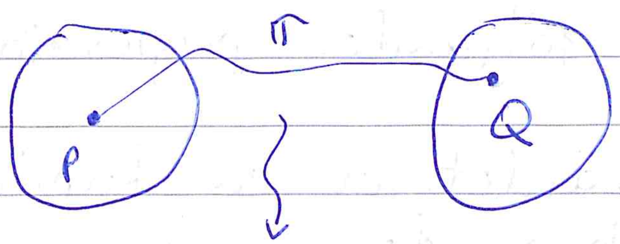
Anmärkning:

Kom ihåg att en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas för en domän om den är både öppen & sammanhängande.

En mängd är sammanhängande$^{(S)}$ om den inte kan skrivas som en disjunkt union av två icke-tomma öppna delmängder

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är bågvist sammanhängande (BS) om det för varje två punkter P, Q i mängden finns en C^0-kurva $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ s.a. $r(a) = P$, $r(b) = Q$, $r([a,b]) \subseteq M$. Med ord: varje par av punkter i M kan förbindas med en kontinuerlig kurva som ligger helt inom M

BS bättre fångar än S den intuitiva idéen att en mängd är "sammanhängande om den inte består av två "separata delar"



kurvan måste lämna M.

Det finns dock konstiga exempel på mängder i $\mathbb{R}^n$, för varje $n \geq 2$, som är sammanhängande (S) men inte bågvist sammanhängande (BS).

** Under resten av kursen antas alla våra domäner vara BS.

<u>Definition av kurvintegral</u>

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän, $a \leq b$ reella tal, $\Gamma : [a,b] \to D$ en C^1-kurva och $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^n$ ett C^0-vektorfält. Integralen

$$\int_a^b \mathbb{F}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)\, dt$$

kallas för <u>kurvintegralen</u> av $\mathbb{F}$ längs kurvan, alternativt för <u>arbetet</u> som uträttas av $\mathbb{F}$ längs kurvan.

<u>OBS!</u> Att vi i definitionen bara säger "kurva" och inte "parametriserad kurva" förklaras av följande proposition:

<u>Prop</u> (i) Värdet av en kurvintegral är oberoende av parametrisering.
(ii) Dock byter kurvintegralen tecken då

kurvan byter orientering.

Bevis (i) bevisas på samma sätt som när vi bevisade att kurvlängd är oberoende av parametrisering. För (ii) notera att om vi byter orientering så byts $\mathbf{r}'(t)$ ut mot $-\mathbf{r}'(t)$ i kurvintegralen (tangenten byter riktning).

Notation för kurvor & kurvintegraler

① γ, C är default bokstäver för kurvor

② Det är vanligt att förkorta

$$\int_a^b \mathbb{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r},$$

vilket är godkänt ty integralens värde är oberoende av parametriseringen.

③ För kurvor i planet är det vanligt att skriva $\mathbb{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy) \Rightarrow$

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

På samma sätt, för kurvor i rummet är det vanligt med notationerna
$\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3) = (P, Q, R)$,
$d\mathbb{r} = (dx, dy, dz)$ $\Rightarrow$

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

(4) Låt $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ vara C^1-kurvor i $\mathbb{R}^n$ s.a. för varje $i = 1, \ldots, n-1$ slutpunkten av γ_i är lika med startpunkten för γ_{i+1}. Vi skriver

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i ,$$

där γ är (styckvis) C^1-kurvan man får om man "limmar ihop" $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Då gäller för ett godtyckligt $\mathbb{F}$ att

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}.$$

OBS! Var försiktig hur du skriver. $\gamma_2 + \gamma_1$ behöver inte ens vara definierad även om $\gamma_1 + \gamma_2$ är det.

(5) Om γ är en kurva i $\mathbb{R}^n$ så skriver

vi $-\gamma$ för samma bana fast med motsatt orientering.

Då gäller för ett godtyckligt $\mathbb{F}$ att

$$\int_{-\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = - \int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

Notera att det make:ar också sense att skriva $\gamma - \gamma = -\gamma + \gamma = 0$; dvs om man följer en viss bana och sedan samma bana baklänges så har man sammanlagt gjort ingenting.

(6) Notationen $\oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ indikerar att γ är en sluten kurva.

OBS! Denna notation verkar än så länge vara otydlig ty den anger inte "åt vilket håll" vi genomlöper den slutna kurvan γ.

Men om man fortsätter att gräva här så är det inte så lätt att förklara vad "åt vilket håll" betyder. Dock kan vi make:a rigorös sense av detta åtminstone för enkla, slutna kurvor i planet, pga:

Jordan Curve Theorem

Låt γ vara en enkel och sluten C^0-kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter.

Vi avstår från ett bevis, som är svårt. Det är betydligt enklare att bevisa satsen för styckvis C^1-kurvor (vilket alla kurvor i denna kurs kommer att vara), men ändå långt ifrån trivialt.

De två sammanhängande komponenterna av $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ kallas för γ's insida och utsida. Insidan är alltid en begränsad mängd och γ är dess rand.

Vi kan nu make:a formell sense av "åt vilket håll"

Definition Låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. γ sägs vara orienterad moturs / positivt orienterad (resp. orienterad medurs / negativt orienterad) om insidan av γ ligger till vänster (resp. till höger) om färdriktningen.

Konvention

Om $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ är enkel och sluten och man skriver

$$\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

OBS! Värdet är oberoende av valet av start = slut punkt.

så är konventionen att γ genomlöps moturs. Om man vill vara ännu tydligare kan man skriva

$$\ointctrclockwise_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} \quad \text{resp.} \quad \ointclockwise_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

$\Uparrow$ moturs / positiv orientering

$\Uparrow$ medurs / negativ orientering.

Beräkning av kurvintegraler

Vi kommer i denna kurs att diskutera 3 "olika" (men relaterade) ~~sätt~~ metoder för att beräkna kurvintegraler. Den teori vi utvecklar har dock viktiga tillämpningar (i fysik) i sig, utöver hur den hjälper oss med beräkningar.

(A) Direkt parametrisering av varje stycke längs en styckvis C^1-kurva och envariabelsintegration

(B) Utnyttja potentialer för konservativa fält (Sats 9.4.2)

(C) Greens Sats (Sats 9.2.1)

OBS! Vår diskussion av (A) och (B) funkar lika bra i godtycklig dimension (boken fokuserar på $n=2$ i kapitel 9). Dock måste vi formulera Greens Sats först endast i planet ($n=2$). Nästa vecka kommer vi att generalisera till $n=3$: Gauss Divergens Sats (Sats 10.2.1) och Stokes Sats (Sats 10.3.2). Att generalisera till godtycklig dimension är överkurs.

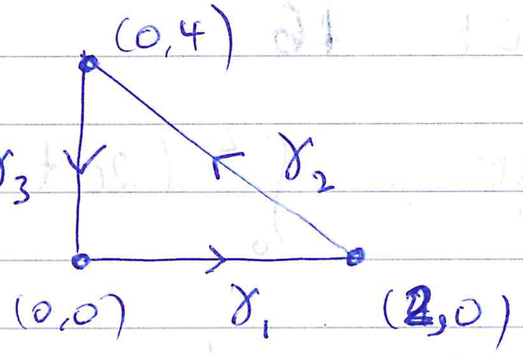
OBS! Dessutom är det bara Stokes Sats som talar om kurvintegraler, medan Gauss Sats talar om s.k. flödesintegraler.

Ⓐ Du måste helt enkelt hitta en explicita parametrisering av varje kurv-stycke och hoppas på att de resulterande enkelintegralerna är beräkningsbara.

Ex: Beräkna $\oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$, där

$\mathbb{F}(x,y) = (8x^2 - y^2,\ 2x^2 + y)$ och γ är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,4)$.

Lösning



$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (vi går moturs)

$$\Rightarrow \oint_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

$\underline{\gamma_1}$ $\quad \mathbb{r}(t) = (t,0) \quad 0 \le t \le 2$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) = \mathbb{F}(t,0) = (8t^2,\ 2t^2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot \mathbb{r}'(t) = (8t^2, 2t^2)\cdot(1,0) = 8t^2$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^2 8t^2\,dt = 64/3.$$

$\underline{\underline{\gamma_2}}$ $\quad \mathbb{r}(t) = (2-t, 2t) \qquad 0 \le t \le 2.$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) = \mathbb{F}(2-t, 2t) = \left(8(2-t)^2 - (2t)^2, 2(2-t)^2 + 2t\right)$$
$$= \left(8(4-4t+t^2) - 4t^2, 2(4-4t+t^2) + 2t\right)$$
$$= \left(4t^2 - 32t + 32, 2t^2 - 6t + 8\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)$$
$$= \left(4t^2 - 32t + 32, 2t^2 - 6t + 8\right) \cdot (-1, 2)$$
$$= -\cancel{4t^2} + 32t - 32 + \cancel{4t^2} - 12t + 16$$
$$= 20t - 16$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^2 (20t - 16)\,dt = \ldots = +8.$$

$\underline{\underline{\gamma_3}}$ Kanske mest naturligt att parametrisera $-\gamma_3$ som

$$\mathbb{r}(t) = (0, t), \qquad 0 \le t \le 4$$
$$\Rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) = \mathbb{F}(0, t) = (-t^2, t)$$
$$\Rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t) = (-t^2, t) \cdot (0, 1) = t$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -\int_{-\gamma_3} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = -\int_0^4 t\,dt = -8$$

Alltså: $\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \frac{64}{3} + 8 - 8 = 64/3$

OBS! $\mathbb{F}$ gör arbete trots att partikeln har (effektivt) inte rört sig