Föreläsning # 18 KONSERVATIVA FÄLT

Definition (s. 344)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och $\mathbb{F}: D \to \mathbb{R}^n$ ett vektorfält. $\mathbb{F}$ sägs vara konservativt / ett potentialfält om det finns ett skalärfält $\phi: D \to \mathbb{R}$ s.a. $\mathbb{F} = \nabla \phi$.

Fältet ϕ sägs i så fall vara en potential till fältet $\mathbb{F}$.

Anmärkning:

Om $\mathbb{F}$ är ett kontinuerligt, konservativt fält i en domän D då är potentialen till $\mathbb{F}$ unik upp till addition med en konstant, dvs

$$\nabla \phi_1 = \nabla \phi_2 = \mathbb{F} \iff \phi_2 = \phi_1 + C \quad \exists\, C \in \mathbb{R}$$

För bevis se Sats 2.4.5 i boken.

Sats 9.4.2

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och $\mathbb{F}: D \to \mathbb{R}^n$ vara ett konservativt fält med potential ϕ. Då gäller för varje C^1-kurva γ i D att

$\longrightarrow$

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} = \phi(\mathbb{b}) - \phi(\mathbb{a}),$$

där $\mathbb{a}$ (resp. $\mathbb{b}$) är γ's startpunkt (resp. slutpunkt).

<u>Anmärkning</u>:

Denna sats är det närmaste vi kan komma till en "Kalkylens Fundamentsats" i flervariabelanalys. I synnerhet notera att, för $n=1$, satsen <u>ÄR</u> KFS ty

$$n=1 \Rightarrow f = \nabla\phi \iff f = d\phi/dx$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\cdot d\mathbb{r} = \int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{KFS}}{=} \phi(b)-\phi(a)$$

$\Updownarrow$

den enda kontinuerliga kurvan i en dimension är en intervall $[a,b]$.

Det borde därför inte heller vara överraskande att beviset av Sats 9.4-2 använder KFS.

<u>Bevis</u> Tag en valfri C^1-parametrisering av γ (det spelar ingen roll vilken ty vi vet att värdet av en kurvintegral är oberoende av parametrisering), säg

$$\gamma = \{\mathbb{r}(t) : a\le t\le b\}$$

Så $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)\,dt$

Om nu $\mathbb{F} = \nabla\phi$ så blir kurvintegralen

$$\int_a^b \left[\nabla\phi(\mathbb{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\mathbb{r}(t)\right] dt$$

Men enligt Kedjeregeln (Sats 2.3.4)
är integranden $= \frac{d}{dt}\phi(\mathbb{r}(t))$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbb{r}(t))\,dt$$

$$\overset{KFS}{=} \phi(\mathbb{r}(t))\Big|_{t=b} - \phi(\mathbb{r}(t))\Big|_{t=a}$$

$$= \phi(\mathbb{b}) - \phi(\mathbb{a}) \qquad \text{v.s.v.}$$

Direkta Korollarier

Låt $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^n$ vara konservativt.

(i) Kurvintegralen $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ är "oberoende av vägen", dvs beror endast på kurvans start & slutpunkter och inte på den exakta banan dem emellan

$\longrightarrow$

(ii) Om γ är en sluten kurva i D så är $\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$

Speciellt (ii) förklarar terminologin "konservativt fält". Ett sådant kraftfält gör inget arbete utan att (effektivt) flytta på en partikel.

Sats 9.4.2 ger en metod för att beräkna kurvintegralen då fältet $\mathbb{F}$ är konservativt som är ett alternativ till explicit parametrisering: "Hitta en potential ϕ".

Ex. 1 Låt vektorfältet $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$\mathbb{F}(x, y, z) = (2z^3 + 2x^3, 2yz^3 + 2y^3, 6xz^2 + 3y^2z^2 + 2z)$$

(i) Bestäm en potential till $\mathbb{F}$

(ii) Bestäm $\int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$, där γ_1 är raksträckan från $(0,0,0)$ till $(2,3,4)$.

(iii) Låt $\mathbb{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$\mathbb{G}(x, y, z) = (2z^3 + 2x^3, 2yz^3 + 2y^3, 6xz^2 + 3y^2z^2 + 2z + x)$$

Bestäm $\int_{\gamma_2} \mathbb{G} \cdot d\mathbb{r}$, där

$$\gamma_2 : \{ \mathbb{r}(t) = \left(2 - 2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), 3\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), 4t\right) : 0 \le t \le 1 \}$$

Lösning:

(i) Vi söker ϕ s.a. $\mathbb{F} = \nabla \phi \iff$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2z^3 + 2x^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2yz^3 + 2y^3 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = 6xz^2 + 3y^2z^2 + 2z \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \phi = \int (2z^3 + 2x^3)\, \partial x$$

$$\Rightarrow \phi = 2xz^3 + \frac{x^4}{2} + C_1(y,z), \quad \ldots (4)$$

där $C_1(y,z)$ är en valfri differentierbar funktion av endast y och z

$$(2) \Rightarrow \phi = \int (2y^3 + 2yz^3)\, \partial y$$

$$\Rightarrow \phi = y^2z^3 + \frac{y^4}{2} + C_2(x,z) \quad \ldots (5)$$

$$(3) \Rightarrow \phi = \int (6xz^2 + 3y^2z^2 + 2z)\, \partial z$$

$$\Rightarrow \phi = 2xz^3 + y^2z^3 + z^2 + C_3(x,y) \quad \ldots (6)$$

(4), (5), (6) är konsekventa med varandra om och endast om

$\longrightarrow$

$$\phi(x,y,z) = 2xz^3 + y^2z^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} + z^2 + C,$$

där C är en konstant. Detta blir den allmänna formeln för potentialen till $\mathbb{F}$. Enklast är att ta $C = 0$ och välja

$$\phi(x,y,z) = (2x+y^2)z^3 + \tfrac{1}{2}(x^4+y^4) + z^2$$

(ii) Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativt så gäller enligt Sats 9.4.2 att

$$\int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \phi(2,3,4) - \phi(0,0,0)$$

$$= (4+9)64 + \tfrac{1}{2}(16+81) + 16 - 0 = 896\tfrac{1}{2}.$$

(iii) Vi utnyttjar att $\mathbb{G}$ är "nästan" konservativt samt att γ_2 har samma ändpunkter som (den betydligt "enklare" kurva) γ_1.

$$\mathbb{G} = \mathbb{F} + (0,0,x)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \mathbb{G} \cdot d\mathbb{r} = \underbrace{\int_{\gamma_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}}_{\downarrow} + \underbrace{\int_{\gamma_2} (0,0,x) \cdot d\mathbb{r}}_{\downarrow}$$

ty $\mathbb{F}$ kons. $= \int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ $= 896\tfrac{1}{2}$

Här kan vi använda den givna parametriseringen av γ_2

$\longrightarrow$

Nollorna innebär att vi kommer att få en relativt enkel integral

$$\int_{\gamma_2} (0,0,x) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (0,0,x) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(0,0,2-2\cos\frac{\pi t}{2}\right) \cdot (\ldots, \ldots, 4)\, dt$$

spelar ingen roll vad dessa är pga nollorna

$$= 8 \int_0^1 \left(1 - \cos\frac{\pi t}{2}\right) dt$$

$$= 8 \left[t - \frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi t}{2} \right]_{t=0}^{t=1} = 8\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 904\tfrac{1}{2} - \frac{16}{\pi}.$$

Vi gör ett instick här med en sats som vi inte kommer att använda direkt men som är intressant i.o.m. att den säger att korollarierna till Sats 9.4.2 gäller omvänt.

Sats 9.4.3

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och $\longrightarrow$

$\mathbb{F}: D \to \mathbb{R}^n$ vara ett C^0-vektorfält.
Om kurvintegralen $\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ är oberoende

av vägen (ekvivalent, om $\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$

för varje sluten C^1-kurva γ i D), då är
$\mathbb{F}$ konservativt.

Bevis Antag att $\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$ för varje

sluten C^1-kurva i D. Vi måste hitta
en funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ s.a. $\mathbb{F} = \nabla \phi$.

Välj $\mathbb{a} \in D$ godtyckligt och definiera ϕ
enligt

$$\phi(\mathbb{x}) = \int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r},$$ där γ är en

godtycklig styckvis C^1-kurva i D med startpunkt
i $\mathbb{a}$ och slutpunkt i $\mathbb{x}$.

OBS! Att ϕ är en väldefinierad funktion
ty valet av γ spelar ingen roll för
kurvintegralens värde.

Det återstår att bevisa att $\mathbb{F} = \nabla \phi$, dvs
att för varje punkt $\mathbb{b} \in D$ och varje
$i = 1, \ldots, n$ gäller $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbb{b}) = F_i(\mathbb{b})$.

Fixera i och $\mathbb{b}$. Per definition så är

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbb{b}) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(\mathbb{b} + h\mathbb{e}_i) - \phi(\mathbb{b})}{h}$$

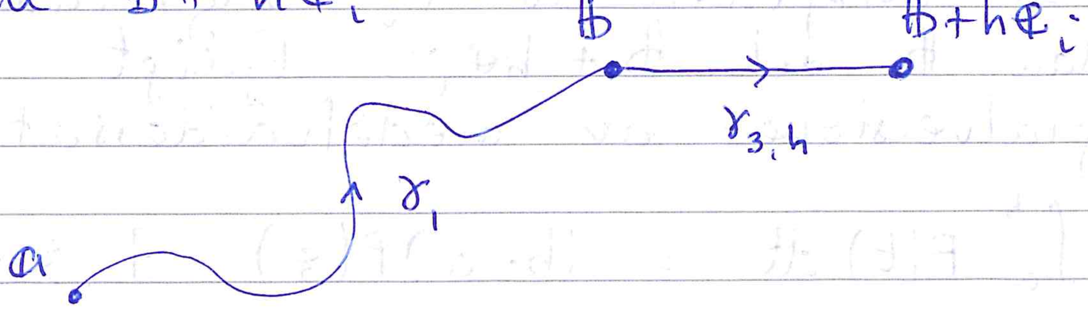
Också, per definition,

$$\phi(\mathbb{b}) = \int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} \; ; \; \phi(\mathbb{b} + h\mathbb{e}_i) = \int_{\gamma_{2,h}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

där γ_1 är en godtycklig styckvis C^1-kurva i D från $\mathbb{a}$ till $\mathbb{b}$ och $\gamma_{2,h}$ är en godtycklig styckvis C^1-kurva i D från $\mathbb{a}$ till $\mathbb{b} + h\mathbb{e}_i$.

Vi väljer $\gamma_{2,h} = \gamma_1 + \gamma_{3,h}$,

där $\gamma_{3,h}$ är rakssträckan från $\mathbb{b}$ till $\mathbb{b} + h\mathbb{e}_i$:



Således är $\phi(\mathbb{b} + h\mathbb{e}_i) - \phi(\mathbb{b}) = \int_{\gamma_{3,h}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$

Den naturliga parametriseringen för $\gamma_{3,h}$ är

$$\gamma_{3,h} = \{ \mathbf{r}(t) = (0,0,\ldots,0,ht,0,\ldots,0) + \mathbf{b} \mid 0 \le t \le 1 \}$$

$\Uparrow$
i:te position

$$\Rightarrow \int_{\gamma_{3,h}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (F_1(\mathbf{r}(t)), \ldots, F_i(\mathbf{r}(t)), \ldots, F_n(\mathbf{r}(t))) \cdot (0,0,\ldots,0,h,0,\ldots,0)\, dt$$

$$= h \int_0^1 F_i(\mathbf{r}(t))\, dt$$

$$= h \int_0^1 F_i(\mathbf{b} + ht\mathbf{e}_i)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{\phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{b})}{h} = \int_0^1 F_i(\mathbf{b} + ht\mathbf{e}_i)\, dt$$

HL är integralen av F_i längs rakssträckan mellan $\mathbf{b}$ och $\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i$. Enligt integralversionen av medelvärdessatsen

$$\left(\int_a^b F(t)\, dt = (b-a) F(\xi) \quad \exists\, \xi \in (a,b) \right)$$

så är HL lika med $F_i(\vec{\xi})$, för någon punkt $\vec{\xi}$ längs raksträckan (vilken punkt beror på h alltså).
Men nu eftersom $\mathbf{F}$ är kontinuerlig, så

också är F_i, och därmed måste $\vec{\xi} \to \mathbb{b}$ då $h \to 0$.

M.a.o. $$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(\mathbb{b} + h\mathbb{e}_i) - \phi(\mathbb{b})}{h} = F_i(\mathbb{b})$$

dvs $$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbb{b}) = F_i(\mathbb{b})$$ v.s.v.

Om man misstänker att ett vektorfält $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är konservativt men är osäker, det vore bra att kunna köra ett enkelt "test" innan man försöker hitta (kanske förgäves) en potential.

Till att börja med har vi ett sådant test för $n = 2$, då $\mathbb{F}$ är C^1.

<u>Definition</u> Låt $\mathbb{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$ vara ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{F}$ sägs vara <u>virvelfritt</u> (ENG: irrotational) om $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

→

Sats 9.4.4

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän och $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^2$ ett C^1-vektorfält. Då gäller:

$$\mathbb{F} \text{ konservativt} \Rightarrow \mathbb{F} \text{ virvelfritt}$$

Bevis Antag att $\mathbb{F}$ är konservativt. Då finns det ett skalärfält ϕ s.a. $\mathbb{F} = \nabla \phi$. Dessutom, $\mathbb{F} \in C^1 \Rightarrow \phi \in C^2$.

$$\mathbb{F} = \nabla \phi \Rightarrow P = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ och } Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \underset{\text{Clairaut}}{\overset{\phi \in C^2}{=}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \blacksquare$$

Så om du vill (snabbt) kolla huruvida $\mathbb{F}$, ett C^1-vektorfält i $\mathbb{R}^2$, är konservativt eller ej, kan du först kolla om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Svar nej $\Rightarrow$ fuhgeddaboudit, $\mathbb{F}$ är ej konservativt

Svar ja $\Rightarrow$???... Här öppnar vi en burk maskar (svenska?)

Veckans Fråga (VF): Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän, $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^2$ ett C^1-vektorfält. Stämmer det alltid att

$$\mathbb{F} \text{ virvelfritt} \Rightarrow \mathbb{F} \text{ konservativt ??}$$

Det direkta svaret är NEJ, vilket illustreras av följande exempel, som också illustrerar varför man använder termen "virvelfritt/irrotational"

Exempel (se Ex. 14, s. 352)

Låt $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Det är klart att D är öppen och BS, alltså en domän.

Låt $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^2$ ges av

$$\mathbb{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Det är uppenbart att $\mathbb{F}$ är ~~upp~~ C^1 i sitt domän, och att $(0,0)$ måste exkluderas från domänen.

Claim 1 $\mathbb{F}$ är virvelfritt

Bevis $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \overset{\text{kolla}}{= \dots =} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\overset{\text{Kolla}}{= \dots =} \partial P/\partial y$.

Claim 2 $\mathbb{F}$ är ej konservativt.

Bevis Det räcker att visa att det

finns slutna kurvor γ i D s.a.

$$\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} \neq 0.$$

Låt $\gamma = \gamma_R$ vara cirkeln av radien R kring origo, genomlöpt moturs.

Dess naturliga parametrisering är

$$\gamma_R = \{ \mathbb{r}(t) = (R\cos t, R\sin t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi \}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^{2\pi} \mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R\sin t}{R^2}, \frac{R\cos t}{R^2} \right) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

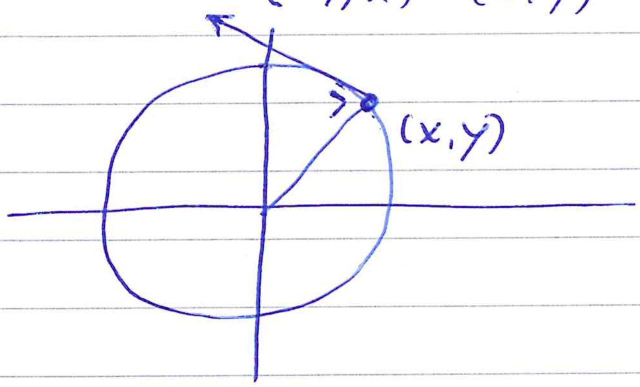
Alltså: $\oint_{\gamma_R} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 2\pi$, oavsett $R > 0$.

Notera tre saker:

(i) Kurvintegralen är oberoende av radien
(ii) Det var faktiskt uppenbart från definitionen av $\mathbb{F}$ att detta kraftfält skulle göra ett nollskilt och positivt arbete då en

partikel går ett varv moturs runt en cirkel kring origo.
Eftersom $\mathbb{F}$s riktning i punkten (x,y) är $(-y,x)$, dvs $\mathbb{F}$ är alltid riktad längs den framåtriktade tangenten till cirkeln

$(-y,x)\cdot(x,y)=0$



Så $\mathbb{F}$ verkligen pushar partikeln runt cirkeln, dvs $\mathbb{F}$ åstadkommer rotation (trots att $\mathbb{F}$ är, per Claim 1, irrotational).

(iii) Varje kurva γ_R går runt den problematiska punkten $(0,0)$ där $\mathbb{F}$ är odefinierat, m.a.o. $(0,0)$ ligger på insidan till varje γ_R. Detta kommer visa sig vara väsentligt till "varför" $\oint_{\gamma_R} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} \neq 0$ trots att $\mathbb{F}$ är virvelfritt. Det leder oss till Greens Sats i $\mathbb{R}^2$ ... nästa föreläsning!