

Flervariabelanalys LV3

Implicita funktionssatsen och dubbelintegraler

Linus Brink	Oscar Lindberg	Jesper Noord
Jonatan Haraldsson	Anna Lundqvist	Joel Wall

Chalmers Tekniska Högskola
21 februari 2021

1 Implicita funktionssatsen

1.1 För två variabler

Nivåkurvor till funktioner av två variabler kan inte alltid uttryckas explicit som en funktion av en variabel. En implicit funktion kan ge flera funktionsvärden för varje argument. Betraktas enhetscirkeln, $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$, är det uppenbart att denna inte utgör någon funktionsgraf då den för $-1 < x < 1$ ger två funktionsvärden för varje x . Däremot kan man lokalt, i en omgivning till en punkt på kurvan, tolka kurvan som en funktion $y = f(x)$. Punkterna $(-1, 0)$ och $(1, 0)$ är exceptionella. Det finns inga omgivningar till dessa punkter där $F(x, y)$ entydigt definierar en funktion $y = f(x)$. I dessa punkter på kurvan är gradienten horisontell och tangenten vertikal. Det visar sig att villkoret $F_y(a, b) \neq 0$ är avgörande för att, i en omgivning till punkten (a, b) , kunna betrakta kurvan som grafen till en funktion $y = f(x)$.

Låt $F(x, y)$ vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion och (a, b) en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om

$$F_y(a, b) \neq 0,$$

så finns en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en $\mathcal{C}^1$ -funktion $y = f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \quad (1)$$

Härledningen till derivationsformeln i satsen bygger på kedjeregeln, vilket i detta sammanhang benämns implicit derivering. För funktionen $y = f(x)$ gäller att $F(x, f(x)) = C$ för alla x nära a . Deriveras den senare med avseende på x fås:

$$F_x(x, f(x)) \cdot 1 + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0, \quad (2)$$

vilket direkt ger derivataformeln (1).

1.2 För n variabler

Låt $F(x_1, \dots, x_n)$ vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion och $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ en punkt där $F(x_1, \dots, x_n) = C$. Om

$$F_{x_k}(\mathbf{a}) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av $\mathbf{a}$ sådan att restriktionen av nivåytan till U implicit definierar en $\mathcal{C}^1$ -funktion av $n-1$ variabler, $x_k = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. För denna funktions partiella derivator gäller

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = -\frac{F_{x_j}}{F_{x_k}}.$$

Den implicita funktionssatsen säger att det, för en funktion av n variabler, är tillräckligt att någon av de partiella derivatorna i en punkt är nollskild för att

man lokalt i en omgivning till den punkten ska kunna eliminera denna variabel och uttrycka den som en funktion av de övriga variablerna. Till exempel är det tillräckligt för funktionen $F(x, y, z)$ att $F_z(a, b, c) \neq 0$, för att man lokalt kring punkten (a, b, c) ska kunna betrakta $F(x, y, z) = C$ som en funktionsyta $z = f(x, y)$.

2 Introduktion till dubbelintegraler

Inom integralkalkyl i en variabel ligger begreppet antiderivata till grund för integralkalkylens fundamentalsats, vilken säger att definitiva integraler kan beräknas enligt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ där } F'(x) = f(x). \quad (3)$$

Under tidigare veckors föreläsningar har det redogjorts för att envariabelanalysens begrepp derivata saknar direkt motsvarighet för funktioner av flera variabler. Det samma gäller även för begreppet antiderivata, vilket gör att fundamentalsatsen inte kan nyttjas för beräkning av definitiva dubbelintegraler.

Liksom envariabelanalysens informella definition av integralen som "arean under grafen" kan flervariabelvärda funktioners integral informellt definieras enligt följande:

Låt området $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara slutet, begränsat och sammanhängande och $z = f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$. Då kan dubbelintegralen av f över området D definieras som

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{"den tecknade volymen mellan } z = f(x, y) \text{ och området } D \text{ i } xy\text{-planet."} \quad (4)$$

Intuitivt kan dx och dy tillsammans med $z = f(x, y)$ tänkas utgöra ett rätblock, där z är höjden och $dx dy$ en infinitesimal basarea i xy -planet. För att göra den informella definitionen rigorös behöver trappfunktioner Φ och Ψ introduceras.

2.1 Definition av trappfunktion

En trappfunktion Φ är definierad på ett område Δ och är en funktion av två variabler, där Δ är en axelparallell rektangel

$$\Delta = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

När Δ utan dess topp- och högerkanter delas in i mindre delrektanglar

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x < x_i, y_{j-1} \leq y < y_j\},$$

där $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ och $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ samt $1 \leq i \leq n$ och $1 \leq j \leq m$, antar Φ ett konstant värde c_{ij} då $(x, y) \in \Delta_{ij}$.

Dubbelintegralen av trappfunktionen Φ över området Δ ges av en summa av alla "höjder" c_{ij} multiplicerat med alla "basareor" $\text{Area}(\Delta_{ij}) = \mu(\Delta_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy := \sum_{i,j} c_{ij} \mu(\Delta_{ij}) \quad (5)$$

Intuitionen att en dubbelintegral består av en summa av rätblock visas i ekvation (5) ovan.

2.2 Definition av integrerbarhet

En begränsad funktion $f(x, y) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara integrerbar över en axelparallell rektangel Δ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ på Δ sådana att:

- (i) $\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta$
- (ii) $\iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy < \varepsilon$.

Dubbelintegralen av f över Δ definieras i så fall enligt

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\Phi \leq f} \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Psi \geq f} \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy.$$

3 Fubinis sats

Fubinis sats är en metod för att beräkna dubbelintegraler. Den grundar sig i att man kan skriva om dubbelintegraler till itererade enkelintegraler och integrera först med avseende på ena variabeln sedan med avseende på den andra.

3.1 Axelparallela rektanglar (Sats 6.1.2, 6.1.3)

Om $f(x, y)$ är en kontinuerlig funktion av två variabler $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ och mängden Δ är en axelparallell rektangel $\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ så gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (6)$$

Intuitivt kan uppdelningen av den volym som dubbelintegralen utgör ses som att man först delar in volymen i oändligt många infinitesimala skivor i x -led och sedan i y -led, eller vice versa. Det tankesättet tydliggör att integrationsordningen inte spelar någon roll eftersom vilken axel man skär längs först är irrelevant.

3.2 Bevis (Sats 6.1.2 6.1.3)

För att bevisa sats 6.1.2 och 6.1.3 krävs att följande punkter visas

- (i) f är integrerbar över Δ
- (ii) de itererade enkelintegralerna $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ och $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ existerar
- (iii) (Fubinis sats)

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (7)$$

Bevisiden för (i) grundar sig på att stänga in $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$ mellan trappfunktioners integraler, vars differens enligt 2.2 punkt (ii) skall kunna göras godtyckligt liten. Funktionen f förutsätts vara kontinuerlig och eftersom Δ är en kompakt mängd gör det att f är likformigt kontinuerlig på Δ . Vidare antar f ett största och minsta värde — C_{ij} och c_{ij} — på varje delrektangel Δ_{ij} . Trappfunktionen Ψ sätts till att vara lika med C_{ij} och Φ till c_{ij} på Δ_{ij} och således är 2.2 punkt (i) uppfylld. Av f :s likformiga kontinuitet följer det att differensen mellan $\iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy$ och $\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy$ blir allt mindre, när partitionerna förfinas.

Punkt (ii) visas med hjälp av kunskaper från envariabelanalysen upprepade två gånger om. Det konstateras att för ett fixt y är $f(x, y)$ en kontinuerlig funktion av en variabel. Därav existerar $\int_a^b f(x, y) dx =: A(y)$. Det återstår nu att visa att $A(y)$ är en likformigt kontinuerlig funktion. Likformig kontinuitet visas med hjälp likformig kontinuitet hos f själv på det kompakta området Δ .

För beviset av (iii) antas att (i) och (ii) gäller. Det behövs då visas att trappfunktionerna Φ och Ψ där $\Phi \leq f \leq \Psi$ ger

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy \leq \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \leq \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Uttrycket nedan följer av definitionen av en dubbelintegral av en trappfunktion samt att $\Phi \leq f$ punktvis:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi(x, y) dx \right) dy \leq \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (9)$$

Med det är den vänstra olikheten visad. På samma sätt visas den högra.

3.3 Allmänna områden (Sats 6.2.4)

Låt $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner med $\alpha(x) \leq \beta(x)$ på intervallet $[a, b]$. Om $f(x, y)$ är kontinuerlig och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ så gäller

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (10)$$

Området D som integreras över kan ses som ett område begränsat av $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ längs y -axeln och a och b längs x -axeln. Ett område sägs vara reguljärt i x -led då det kan delas upp i ändligt många delområden på formen $D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$. En dubbelintegral över ett område som är reguljärt i x -led kan integreras först med avseende på y och sedan x . Tvärtom gäller för en dubbelintegral över ett reguljärt område i y -led. Ett område som är reguljärt i både x - och y -led kallas reguljärt. En axelparallel rektangel är det enklaste exemplet på ett reguljärt område. Den kan som nämnts tidigare integreras med avseende på x eller y först.

4 Beräkning av dubbelintegral med inspektion

Beräkning av dubbelintegraler med hjälp av inspektion innebär egentligen att de löses utan att använda någon direkt räkning. Genom den informella definitionen av en dubbelintegral, att den är en tecknad volym, kan de i vissa fall beräknas med hjälp av endast linjäritet och symmetrier.

Linjäritet innebär att en dubbelintegral kan skrivas isär på följande vis:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy. \quad (11)$$

Denna likhet gäller eftersom integration är en linjär operation på funktioner och att definitionen för en dubbelintegral är att den är en tecknad volym. Om negativa areor och volymer betraktades som positiva, skulle inte denna linjäritetsegenskap gälla.

Definitionen för dubbelintegraler gör också att de kan beräknas med hjälp av symmetrier. Följande dubbelintegral är ett exempel på detta. Låt $D = \{(x, y) : -5 \leq x \leq 17, -\pi \leq y \leq \pi\}$. Då är

$$\iint_D x^{16} y^{29} dx dy = 0, \quad (12)$$

ty D är symmetrisk kring x -axeln och $x^{16} y^{29}$ är en udda funktion på D med avseende på y . Symmetrin leder till att dubbelintegralen blir lika med noll och den är löst utan att någon egentlig räkning genomförts.

Alla dubbelintegraler går inte att fullständigt lösa med hjälp av inspektion, men ibland kan dubbelintegraler, som annars hade varit näst intill omöjliga att lösa, förenklas avsevärt och delvis lösas för att sedan kunna beräknas med andra metoder, som Fubinis sats.

5 Variabelbyte i dubbelintegraler

Låt

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

vara en bijektiv $\mathcal{C}^1$ -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet, sådan att $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ i E . Då är

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (13)$$

Notera att kravet på funktionaldeterminanten är nödvändigt för ett giltigt variabelbyte. Beloppet av funktionaldeterminanten, $|J(u, v)|$, kan tolkas som areaförändringen för avbildningen från varje infinitesimal area i xy -planet till uv -planet.

6 Integration med hjälp av nivåkurvor

Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en $\mathcal{C}^1$ -funktion av två variabler, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en $\mathcal{C}^0$ -funktion av en variabel och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt kvadrerbart mängd. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b \forall (x, y) \in D$ och sätt $A(u) = \text{Area}(\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\})$. Då gäller att

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du. \quad (14)$$

Förusatt att det är möjligt att ta fram en explicit formel för arean reducerar alltså satsen dubbelintegralen till en enkelintegral. Det är viktigt att vara uppmärksam på att satsen enbart gäller integrander på den specifika formen $h \circ g$, där h är en funktion av *en* variabel.

7 Generaliserade dubbelintegraler

Det finns två anledningar till att integralbegreppet behöver generaliseras:

- (i) För att området vi integrerar över innehåller punkter där funktionen har "värdet" $\pm\infty$, eller för att

(ii) domänen vi integrerar funktionen över är oändligt stor.

För att definiera

$$I = \int \int_D f(x, y) \, dx \, dy$$

då det ingår en punkt (a, b) i D s.a. $f(a, b) = \pm\infty$ tar vi gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int_{D \setminus E} f(x, y) \, dx \, dy,$$

där E är mängden punkter vars avstånd till (a, b) är mindre än ε . Det andra fallet definieras även det genom ett gränsvärde, men där täcks istället D av en växande oändlig serie med mängder vilka tillsammans kommer täcka hela D .

I praktiken så löses dessa uppgifter oftast genom att man med hjälp av Fubinis sats integrerar en variabel i taget, och då behandlas dessa generaliserade integraler på exakt samma sätt som vi är vana vid från envariabelanalysen. När man gör detta kan man hamna i situationerna att

- man får ett konkret värde då man sätter in konkreta värden,
- integralen får värdet $\pm\infty$ om man sätter in en term/faktor med värdet $\pm\infty$ eller delar med 0.
- integralen blir obestämd då en primitiv funktion blir obestämd då man går mot gränsen av intervallet (som i fallet av $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$).

En generaliserad integral som visar sig ha betydelse för räkning med normaldistributioner med mera är

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy. \quad (15)$$

För att lösa denna integral börjar vi med att byta till polära koordinater:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr \, d\theta.$$

Vi gör nu variabelbytet $u = r^2$ och får

$$2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} \, du = \pi [-e^{-\infty} - (-e^0)] = \pi. \quad (16)$$

Enligt Fubinis sats så är

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} \, dy \right),$$

så ekvationerna (15) och (16) medför att

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}. \quad (17)$$

Detta kallas Gauss formel och den hjälper bland annat oss att ta fram formeln som beskriver normaldistributioner.