

Sammanfattning lv.3

Efraim Zetterqvist Elliot Källander Alvin Gustafsson
Isac Johnsson Shahir Imam Viktor Göransson

February 2021

1 Implicita funktioner

Den implicita funktionssatsen används för att ta reda på om funktionen av n antal variabler kan implicit definiera en funktion av $n - 1$ antal variabler i någon omgivning av en punkt (a, b) . Enhetscirkeln är ett enkelt exempel, funktionen av 2 variabler $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ kan definieras som två funktioner av en variabel $\pm\sqrt{1 - x^2}$. Problemet uppstår eftersom det inte finns någon omgivning till punkten $(\pm 1, 0)$ där y är entydigt bestämd av x . Det är också de enda två punkterna då tangenten till enhetscirkeln är horisontell och därmed också då gradienten är noll. Nedan är satsen formulerad för fallet $n = 2$.

Sats 3.4.3

Låt $F(x, y)$ vara en C^1 funktion av två variabler och $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om $F_y(a, b) \neq 0$, då finns det en omgivning u av (a, b) så att restriktionen av nivåkurvan till u definierar en C^1 funktion $y = f(x)$. Derivatan av denna funktion är lika med $f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$.

2 Intuition av integraler i flervariabel

Informellt kan det sägas att dubbelintegralen är volymen begränsad av grafen $z = f(x, y)$ och området D i xy -planet. Detta kan i sin tur användas för att lösa en viss typ av integraler genom enbart inspektion. Dock finns det en mer formell definition.

3 Dubbelintegraler

Det finns fyra olika sätt att lösa dubbelintegraler på.

A - Inspektion

- Utnyttja definitionen av en dubbelintegral som en tecknad volym.
- Utnyttja symmetri av exempelvis udda/jämna funktioner.

- Utnyttja linjäritet, vilket gör att integralen kan skrivas om som:

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy. \quad (1)$$

B - Fubinis sats (sats 6.1.2, 6.1.3, 6.2.4)

Steg 1 Axelparallella rektanglar.

Detta innebär att området D som begränsar volymen är en rektangel och eftersom så är fallet kan den integreras med avseende på en variabel i taget och betrakta den andra variabeln som en konstant. Vad det här innebär är att dubbelintegralen kan ses som en sammanslagning av två enkelintegraler, vilket gör att det inte heller spelar roll vilken variabel som först integreras med avseende på. Detta kan på så sätt vara ett tillfälle att stanna upp och fundera ut vilken av de två vägarna som är enklast för att göra beräkningen mer behaglig. För den formella satsen, se sats 4 nedan.

Steg 2 Fubini för reguljära områden.

Definitionen för ett reguljärt område lyder. D sägs vara reguljärt i x -led om D kan partitioneras i ändligt många delområden. Där varje enskilt delområde har formen.

$$D_i = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\} \quad (2)$$

Där alpha- och betafunktionen är C^1 funktioner av en variabel. På samma sätt definieras D som reguljärt i y -led. D sägs vara reguljärt om det både är i x och y -led som visas på samma sätt. Nu kan vi använda sats 6.2.4 nedan.

C - Variabelbyten (sats 6.4.6)

Variabelbyten kan exempelvis användas för att byta från kartesiska till polära koordinater och medför att dubbelintegralen får nya gränser samt att en faktor, Jacobianen, tillkommer för att anpassa för skillnaden mellan variablerna.

D - Nivåkurvor (Formel 29, s.271)

Med förutsättningarna att dubbelintegralens integrand är en funktion $h(g(x, y))$, där h är en funktion av en variabel och att området som integreras över har en geometriskt form vars area kan beräknas, kan nivåkurvor till $g(x, y)$ användas för att beräkna integralen.

3.1 Fubinis sats

3.1.1 För axelparallella rektanglar

Satser 6.1.2, 6.1.3

Låt Δ vara en axelparallell rektangel på x, y -planet där $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att

$$\Delta = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}. \quad (3)$$

Om $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right). \quad (4)$$

Dubbelintegralen delas upp i två enkelintegraler och kan intuitivt tolkas som att volymen först skivas upp i x -led och sedan skivas upp i y -led. Först beräknas den inre integralen med dx där y är fixt, vilket efter beräkning lämnar en funktion av y till integralen dy . Satsen visar även att ordningen på vilken integral som beräknas först inte spelar någon roll. Fubinis sats för axelparallella rektanglar är endast ett specialfall av reguljära områden.

3.1.2 För reguljära områden

Sats 6.2.4

Låt D vara en kompakt mängd på x, y -planet,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}. \quad (5)$$

där $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga funktioner så att $\alpha(x) \leq \beta(x)$ på hela intervallet $x \in [a, b]$. Om $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, gäller

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right). \quad (6)$$

Likt Fubinis sats för axelparallella rektanglar delas dubbelintegralen upp i två enkelintegraler, där skillnaden är att området D är nu begränsat av funktioner $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ i y -led. På samma sätt kan ett område D istället vara begränsat av funktioner i x -led.

3.2 Variabelbyten

Sats 6.4.6

Låt $\{x = g(u, v), y = h(u, v)\}$ vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande plan D i xy -planet sådana att Jacobianen $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$. Då gäller följande:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (7)$$

Förutom den noterbara förändring som sker i dubbelintegralens gränser då området ändras från D till E , är det Jacobianens tillkomst som är svårast att förstå intuitivt. För att belysa Jacobianens part kan ekvationen informellt skrivas på följande sätt:

$$dx dy = |J(u, v)| du dv \quad (8)$$

Från linjär algebra är det känt att en determinant utgör en förstoringsfaktor vid en linjär transformation. Då Jacobianen är funktionaldeterminanten för sambandet mellan variablerna (x, y) och (u, v) representerar den förändringen i arean mellan $dx dy$ och $du dv$. Ett mycket vanligt variabelbyte är bytet från kartesiska till polära koordinater, $dx dy = r dr d\phi$, där Jacobianen blir r .

Beräkning av Jacobianen, givet x och y i termer av u och v , görs enkelt genom uträkning av funktionaldeterminanten. I fallet då u och v är givna i termer av x och y kan knepet att $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}$ användas, vilket gäller då $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ för linjära avbildningar A .

Exempel

Följande dubbelintegral lämpar sig väl för ett variabelbyte till polära koordinater:

$$\iint_D x^2 e^{x^2+y^2} dx dy \quad (9)$$

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25, y \geq |x|\} \quad (10)$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (11)$$

Med vetskapen om att $r^2 = x^2 + y^2$ och genom uppritning av området kan gränserna för området med de nya variablerna bestämmas. Då Jacobianen vid byte till polära koordinater är r kan nu dubbelintegralen skrivas som:

$$\int_0^5 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r^3 \cos^2(\theta) e^{r^2} d\theta dr \quad (12)$$

Denna dubbelintegral kan sedan lösas m.h.a Fubinis sats.

3.3 Dubbelintegraler m.h.a nivåkurvor

Formel 29, s.271

Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^1 -funktion av två variabler, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en C^0 -funktion av en variabel och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en kompakt, kvadrerbar mängd. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b$, $\forall (x, y) \in D$. Sätt $A(u) := \text{Area}(\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\})$. Då gäller att:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du \quad (13)$$

I ekvationen är det noterbart att dubbelintegralen, som kan beskrivas som en volym, skrivs om till en enkelintegral, vilket implicerar att även enkelintegralen beskriver en volym. Begränsningarna av område D är de två nivåkurvorna $g(x, y) = a$ och $g(x, y) = b$. Då $A(u)$ är den area i område D som begränsas av nivåkurvan $g(x, y) = u$, är $dA(u) = A'(u) du$ den infinitesimala arean mellan nivåkurvorna $g(x, y) = u$ och $g(x, y) = u + du$. Område D delas således upp i

infinitesimala areor mellan nivåkurvorna $g(x, y) = a$ och $g(x, y) = b$. I enkelintegralens integrand utgör $h(u)$ höjden för varje del, som är konstant för varje enskild del då även u är det. Varje del blir därför en infinitesimal volym som integreras mellan gränserna a och b och bildar den totala volymen som beskrivs av dubbelintegralen.

För att metoden med att använda nivåkurvor för att lösa dubbelintegraler ska vara möjlig förutsätts det att dubbelintegralens integrand ska kunna skrivas som $h(g(x, y))$, där h är en funktion av en variabel. Dessutom behöver området D vara utformat på så vis att en explicit formel ska kunna tas fram för arean $A(u)$.

Exempel

Beräkna:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + (x + 2y)^2)^2} \quad (14)$$

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, 1 \geq x + 2y \leq 2\} \quad (15)$$

För att uttrycket ska stå på formen $h(g(x, y))$ är $g(x, y) = x + 2y$ och $h(u) = \frac{1}{(1+u^2)^2}$. Då området bildar en rand längs med hypotenusan av en rätvinklig triangel kan dess area med enkla medel räknas ut geometriskt. Vid uträkning av denna area fås det att $A(u) = u^2/4 - 1/4$ vilket implicerar att $A'(u) = u/2$. Integrationsgränserna fås från området D och är noterbart 1 & 2, vilket ger följande enkelintegral:

$$\int_1^2 \frac{u/2}{(1 + u^2)^2} du \quad (16)$$

Denna enkelintegral kan sedan lösas m.h.a tidigare välkända metoder.

3.4 Generaliserade dubbelintegraler

Dubbelintegralen

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (17)$$

är generaliserad då området D antingen är:

1. ett begränsat område, men f är obegränsad i en eller flera punkter på området D .
2. ett obegränsat område i xy -planet.

Då kan gränsvärdet av dubbelintegralens värde undersökas om det existerar. Genom att tillämpa tekniker som exempelvis Fubinis sats kan dubbelintegralen reduceras till en enkel-integral. Då kan integralens gränsvärde undersökas, med hjälp av fall 1:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 x^t dx = \begin{cases} +\infty, & t \leq -1 \\ \frac{1}{t+1}, & t > -1 \end{cases} \quad (18)$$

och fall 2:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h x^t dx = \begin{cases} +\infty, & t \geq -1 \\ \frac{-1}{t+1}, & t < -1 \end{cases} \quad (19)$$

3.4.1 Definitioner

För att bevisa följande huvudsats behövs det ett par definitioner. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel, och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då gäller att:

1.

$$f \text{ är integrerbar över } \Delta \quad (20)$$

2.

De itererade enkel-integralerna existerar

$$\int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) \quad (21)$$

3.

$$\text{Fubini: } \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) \quad (22)$$

Vi låter $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel.

Först behöver vi definiera vad en trappfunktion $\phi(x, y)$ är. En trappfunktion ger ett konstant värde på varje delrektangel eller mer specifikt varje höger och ovensida på varje rektangel sett från ett xy -plan. Detta är för att en sida bara ska kunna definiera en delrektangel och inte flera. Vilket med andra ord motsvarar höjden på varje delrektangel som finns i det området som begränsas av den axelparallella rektangeln och den funktionen av två variabler som vi har. Volymen på den area som i sin tur bildas av dessa n st rektanglar blir således

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} \cdot (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \quad (23)$$

Där c_{ij} är värdet på trappfunktionen för den ij :te rektangeln. Låter man sedan dessa rektanglar blir små, infinitesimalt små vilket gör att rektanglarna går mot att bli oändligt många. Detta gör att summan ovan 23 definieras av följande dubbelintegral 24.

$$\iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy \quad (24)$$

Där $dx dy$ är den infinitesimalt lilla arean och $\phi(x)$ är höjden vilket bildar en volym.

Vi behöver också veta definitionen för när en funktion f är integrerbar. Detta

är den om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner ϕ och ψ på den axelparallella rektangeln Δ så att:

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{och} \quad \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy < \epsilon \quad (25)$$

Är detta fallet så definieras värdet av integralen av f som supremum av integralen av ϕ -integralen eller infimum av ψ -integralen. Detta eftersom integralen är begränsad både ovan- och underifrån.

3.4.2 Huvudsatsen

För att sedan bevisa 1 i huvudsatsen låter vi $\epsilon > 0$ och vi måste hitta trappfunktioner ψ, ϕ så att $\phi \leq f \leq \psi$ punktvis på Δ och att differensen mellan ψ :s och ϕ :s dubbelintegraler är $\leq \epsilon$ se (25). Vidare eftersom f är kontinuerlig och Δ är en kompakt mängd är f likformigt kontinuerlig. Detta hjälper oss att dra slutsatsen att det för alla epsilon finns ett delta så att $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\epsilon}{Area(\Delta)}$ då $|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta$ på Δ .

Välj nu varje delrektangel i Δ så att diagonalen i den rektangeln är mindre än δ . Eftersom f är kontinuerlig så antar både f ett största värde (C_{ij}) och ett minsta värde (c_{ij}) på varje enskild delrektangel. Detta gör att för varje delrektangel är:

$$C_{ij} - c_{ij} < \frac{\epsilon}{Area(\Delta)} \quad (26)$$

Definierar vi nu trappfunktionerna som dessa max- och min-värden är det uppenbart att $\phi \leq f \leq \psi$. Utifrån definitionen av dubbelintegralen får vi nu.

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \phi(x, y) dx dy &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (C_{ij} - c_{ij}) \cdot (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \\ &< \frac{\epsilon}{Area(\Delta)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \\ &= \frac{\epsilon}{Area(\Delta)} \cdot Area(\Delta) = \epsilon \quad V.S.V \end{aligned} \quad (27)$$

Beviset för 2 tas inte upp i denna sammanfattning eftersom det inte är examinerbart och 3 är en direkt konsekvens av hur en dubbelintegral av en trappfunktion definieras.