

Föreläsning #19

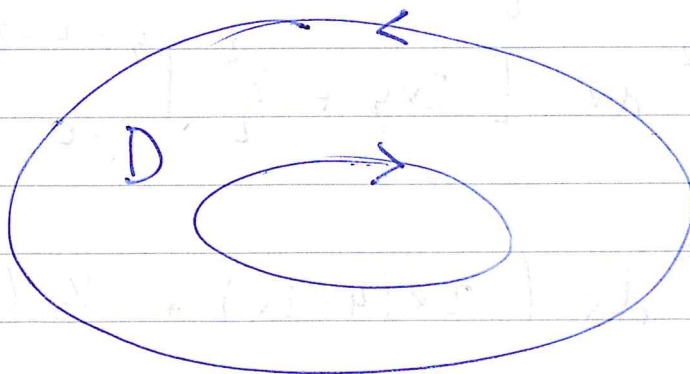
GREENS SATS I $\mathbb{R}^2$

Sats 9.2.1

Låt P och Q vara två C^1 -funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgöres av en eller flera styckvis C^1 -kurvor och som är positivt orienterad så är

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

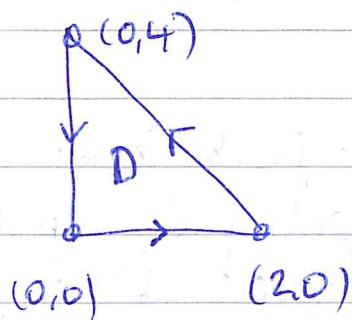
OBS OBS! "Positivt orienterad rand" innebär att D ligger alltid till vänster om färdriktningen. Det är inte nödvändigtvis samma sak som att gå moturs, i fall D har "hål".



Innan vi diskuterar beviset vill jag göra ett par exempel.

Ex. 1

Vi gör om exemplet med triangeln från Fö-17.



$$F(x,y) = (8x^2 - y^2, 2x^2 + y)$$

$$\Rightarrow P(x,y) = 8x^2 - y^2$$

$$Q(x,y) = 2x^2 + y$$

Enligt Greens Sats:

$$\oint_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D} P dx + Q dy \quad (\text{moturs})$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_D (4x + 2y) dx dy = 2 \iint_D (2x + y) dx dy$$

Fubini

$$= 2 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (2x + y) dy$$

$$= 2 \int_0^2 dx \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=4-2x}$$

$$= 2 \int_0^2 dx \left(2x(4-2x) + \frac{1}{2} (4-2x)^2 \right)$$

$$= 8 \int_0^2 dx \left(x(2-x) + \frac{1}{2} (2-x)^2 \right)$$

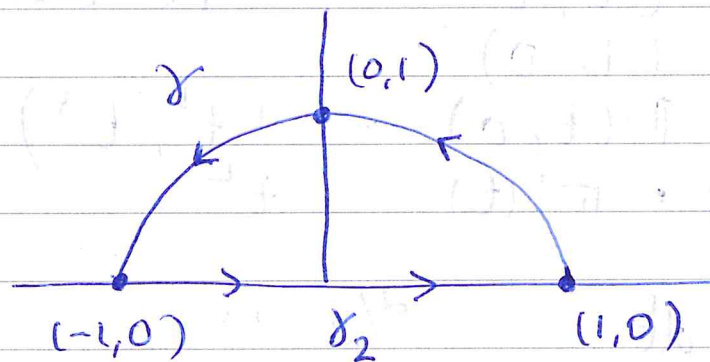
$$= 8 \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \dots = 8 \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{64}{3} \checkmark$$

Ex. 2 Beräkna $\int_{\gamma} F \cdot d\tau$, där

$F(x,y) = (-y^3 + x^2, x^3 + y^2)$ och γ är övre halvan av enhetscirkeln, genomlöst moturs.

Lösning γ är inte en sluten kurva så vi kan ej tillämpa Greens Sats direkt. Men vi kan lägga till en "enkel" kurvstycke för att få en sluten kurva:

dvs: enkel att parametrisera



$\gamma + \gamma_2 = \partial D$ (med positiv orientering)

$$\text{Green} \Rightarrow \int_{\gamma + \gamma_2} F \cdot d\tau = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} F \cdot d\tau = \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy}_{(1)} - \underbrace{\int_{\gamma_2} F \cdot d\tau}_{(2)}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2$$

$$\Rightarrow 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\text{polära} = 3 \int_0^\pi \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$\textcircled{2}$ Enkelt att parametrisera:

$$\pi(t) = (t, 0), \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\pi'(t) = (1, 0)$$

$$F(\pi(t)) = F(t, 0) = (t^2, t^3)$$

$$\Rightarrow F(\pi(t)) \cdot \pi'(t) = t^2$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\text{Alltså: } \int_{\gamma} F \cdot d\sigma = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

OBS! Det hade gått att beräkna kurvintegralen via direkt parametrisering men det hade blivit jobbigare uträkningar.

Den naturliga parametriseringen av γ

$$\bar{\alpha} \quad \pi(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\Rightarrow \pi'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$F(\pi(t)) = F(\cos t, \sin t)$$

$$= (-\sin^3 t + \cos^2 t, \cos^3 t + \sin^2 t)$$

$$\Rightarrow F(\pi(t)) \cdot \pi'(t) = \sin^4 t - \sin t \cos^2 t + \cos^4 t + \cos t \sin^2 t$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi (\sin^4 t + \cos^4 t + \cos t \sin^2 t - \sin t \cos^2 t) dt$$

Jobbigt! Iofs finns en hel del symmetri:

$$\int_0^\pi \sin^4 t dt = \int_0^\pi \cos^4 t dt$$

$$\text{och } \int_0^\pi \cos t \sin^2 t = 0 \quad \text{ty } \cos t < 0 \text{ mellan } \pi/2 \text{ och } \pi$$

Detta lämnar:

$$2 \int_0^\pi \sin^4 t dt - \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt$$

$$\begin{aligned} \sin^4 t &= \sin^2 t \sin^2 t & u &= \cos t \\ &= \sin^2 t (1 - \cos^2 t) & \Rightarrow \int_{-1}^1 u^2 du &= 2/3 \\ &= \sin^2 t - (1/2 \sin 2t)^2 \\ &= 1/2 (1 - \cos 2t) - 1/8 (1 - \cos 4t) \\ &= 3/8 - 1/2 \cos 2t + 1/8 \cos 4t \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi : \frac{3\pi}{8} - 0 + 0 \text{ (symmetri)} = 3\pi/8.$$

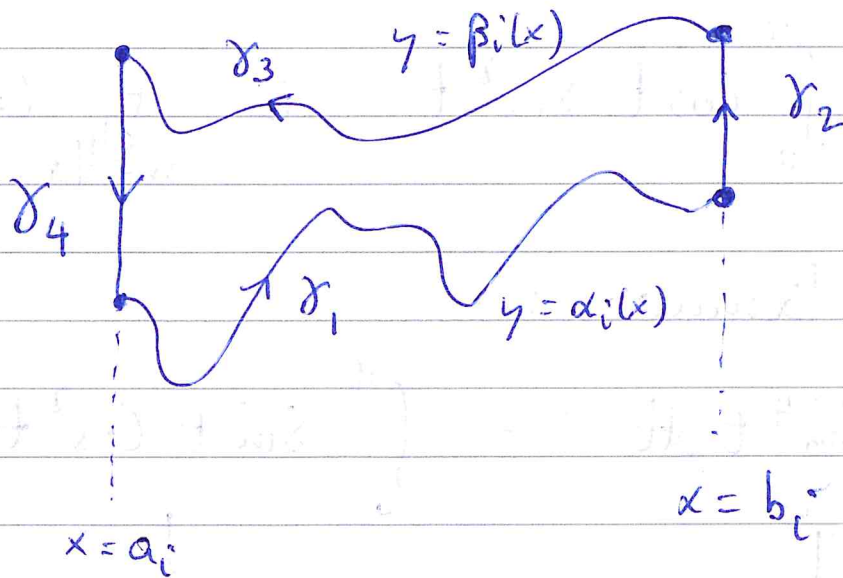
Bevis av Greens Sats för reguljära områden

Step 1 Under förutsättning att D är reguljärt i x -led ska vi visa att

$$\oint_{\partial D} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (1)$$

Låt $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ där

$$D_i = \{ (x,y) \mid a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x) \}$$



$$\partial D_i = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

V_i visar först att för varje $i=1, \dots, n$ gäller



$$\oint_{\partial D_i} P dx = - \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (2)$$

Betrakta först HL av (2). Vi kan använda Fubini:

$$- \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$= - \int_{a_i}^{b_i} dx P(x, y) \Big|_{y=\alpha_i(x)}^{y=\beta_i(x)}$$

$$= \int_{a_i}^{b_i} P(x, \alpha_i(x)) dx - \int_{a_i}^{b_i} P(x, \beta_i(x)) dx$$

$$= \int_{\gamma_1} P dx \quad (+) \quad \int_{\gamma_3} P dx$$

Yes, ty γ_3 är orienterad höger till vänster

$$\text{Men } \int_{\gamma_2} P dx = \int_{\gamma_4} P dx = 0 \text{ ty både}$$

γ_2 och γ_4 är vertikala ($dx = 0$)

Alltså har vi visat att

$$-\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\gamma_i} P dx = \int_{\partial D_i} P dx,$$

vilket är (2).

Om vi nu summerar (2) över alla delområden så får vi att

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

HL: Man beräknar samma dubbelintegral över varje D_i och adderar. Klart att summan är dubbelintegralen över hela D . Så HL är

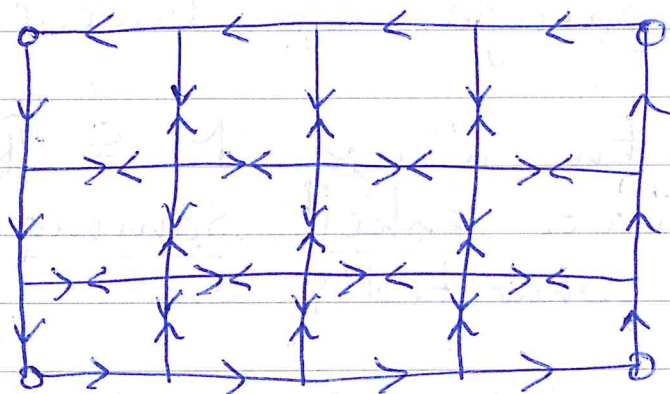
$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

VL: För att visa (1), återstår det att visa att

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = \oint_{\partial D} P dx$$

Ideen är att "integraler längs inre kanter kancellerar".

Illustreras enklast med en bild, där varje D_i är en axelparallell rektangel för enkelhets skull (det är samma idé oavsett)



Det är bara integralen längs den yttre randen som överlever.

Steg 2 Med ett direkt analogt resonemang som i Steg 1 kan man bevisa att, om D är reguljärt i y -led så gäller:

$$\oint_{\partial D} Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy \quad \dots (3)$$

Steg 3 Om D är reguljärt så är

det reguljärt i både x -led och y -led,
Så både (1) och (3) gäller. Addera $\Rightarrow$

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \square$$

Två tillämpningar av Greens Sats

① Def: En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs
vara enkelt sammanhängande
(ENG: simply connected) om

- (i) M är (bågvist) sammanhängande
- (ii) För varje enkel, sluten kurva γ i M
gäller att insidan av γ ligger helt
inom M .

Intuitivt säger (ii) att " M har inga hål".

Sats 9.4.5

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en enkelt sammanhängande
domän, och $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett C^1 -vektorfält.
Då gäller:

F virvelfritt $\Rightarrow F$ konservativt.

Bevis Antag att $F = (P, Q)$ är
irrotationsfri, dvs antag att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

För att härleda att F är konservativ
räcker det, enligt Sats 9.4.3, att
bevisa att $\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0$ för varje
enkel, sluten kurva γ i D .

Så låt γ vara en sådan kurva.
Sätt E = insidan av γ (väldefinierad
enligt Jordans Sats) $\Rightarrow \gamma = \partial E$ om
den orienteras moturs.

Eftersom domänen D antogs vara
enkelt sammanhängande så är
 $E \subseteq D$, så F är definierad i
hela E . Därför kan vi tillämpa
Greens Sats och säga att

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = \oint_{\partial E} F \cdot dr = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= 0, \text{ v.s.v.}$$



OBS! Denna sats är konsekvent med
sista exemplet från Fö-18, ty
där var domänen $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
som INTE är enkelt sammanhängande.
 D har ju ett hål i origo.

Man kan faktiskt bevisa att, om
 G är ett godtyckligt virvelfritt fält
i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, så finns det en
konstant $c \in \mathbb{R}$ s.a.

$$G = K + c \cdot F, \quad \dots (*)$$

där F är fältet från Fö-18 och K
är något konservativt fält.

Ekvivalent: Om $D \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, är en domän,

$$V := \{ G : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid G \text{ är } C^1 \text{ och virvelfritt} \}$$

$$W := \{ G : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid G \text{ är } C^1 \text{ och konservativt} \}$$

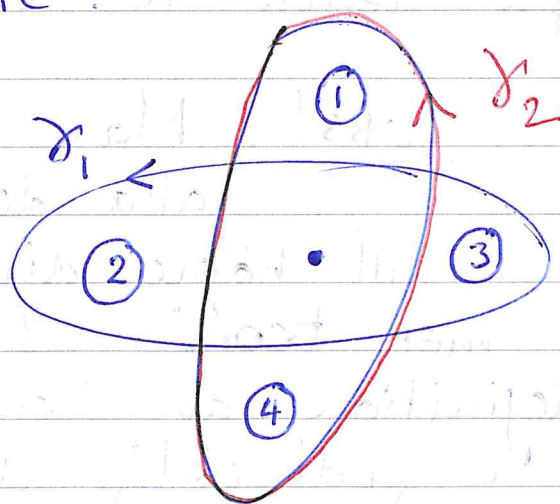
det är uppenbart att både V och W är
slutna under addition av funktioner (ty
partiell derivering är en linjär operation),
så både V och W är underrum i (det
oändligt dimensionella) vektorrummet $C^1(D)$

• Sats 9.4.4 säger att $W \subseteq V$, oavsett D

- Sats 9.4.5 säger att $V=W$ då D är enkelt sammanhängande
- (*) säger att $\dim(V/W) = 1$ då $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Mer allmänt kan man bevisa att $\dim(V/W) =$ "antalet hål i D ".

Bevis av detta sista påstående är överkurs men kolla de extra anteckningarna för Lv 6 i Canvas för idén hur det går till

Key Picture:



$\mathbb{F}$ irrotelfritt

$$\Rightarrow \int_{\partial D_i} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ för } i=1,2,3,4 \text{ ty}$$

ingen D_i innesluter hålet

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Notera att detta säger t.ex. att för
fältet $\mathbb{F}$ från Fö-18,

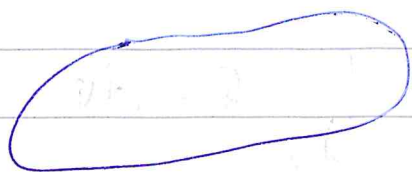
$$\mathbb{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

$$\text{att } \oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\tau = 2\pi,$$

för VARJE enkel, sluten kurva γ
som innesluter $(0,0)$.

Detta kan utnyttjas t.ex. för att beräkna
några svåra definiterade integraler: se
Uppgift 9 på tenta 10-03-2018.

~~2/2~~ ~~Area~~ OBS! Man kan generalisera
alla dessa observationer
till högre dimensioner men
det kräver mer teori. I synnerhet
krävs en definition av "enkel" sammanhängande
som funkar i godtycklig dimension, ty
definitionen ovan åberopar Jordans Sats
(att varje enkel, sluten kurva i $\mathbb{R}^2$ har en
"insida"), vilket öht inte make:ar sense
redan i $\mathbb{R}^3$



Använd 3:e dimensionen
för att "gå ut"

Vi kommer att ge en sådan definition nästa vecka, och bevisa en 3-D version av Sats 9.4.5 (det är Sats 10.5.4)

Mer allmänt, 3-D versionen av alla ovanstående observationer går under namnet Russell Crowes Sats (!!)

För att se varför, kolla

<https://www.youtube.com/watch?v=mGe0t4xVrX4>

Fokusera på vad han skriver på tavlan!

② Areaformel

- Om vi i Greens Sats tar $P=y$, $Q=0$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D} y \, dx = - \iint_D 1 \, dx \, dy = - \text{Area}(D)$$

- Om vi i stället tar $P=0$, $Q=x$

$$\Rightarrow \oint_{\partial D} x \, dy = \text{Area}(D)$$

→

- Så i allmänhet, för godtyckligt $\lambda \in \mathbb{R}$ gäller

$$\text{Area}(D) = \lambda \oint_{\partial D} x \, dy - (1-\lambda) \oint_{\partial D} y \, dx$$

Oftast tar man $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ eller $\lambda = \frac{1}{2}$

den s.k. "symmetriska" versionen av areaformeln.