

Sammanfattning av tavelpresentation LV2

Ilma Aase
Nina Ekelund
Linnea Löfvenholm
Simon Rödén
Philip Öhman

February 2021

1 Inledning

Det här är en sammanfattning av grupp 2D:s tavelpresentation fredagen den 29 januari. I texten behandlas bland annat Clairauts sats, lokala extrempunkter, Taylorutveckling i flera variabler och vektorvärda funktioner.

2 Clairauts sats, transformationer och kedjeregeln

2.1 Clairauts sats

För vissa partiella differentialekvationer kan beräkningar simplificeras signifikant med ett variabelbyte som genomförs med en transformation. För transformationen utnyttjas vid behov Clairauts sats:

SATS 2.5.9. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Om $f \in C^2(D)$ så gäller för alla $(a, b) \in D$

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \quad (1)$$

För särskilda funktioner är det uppenbart sant att ekvation (1) gäller, exempelvis för funktionen $f(x, y) = x + y$ för alla punkter, men för att visa att ekvationen gäller generellt krävs ett formellt bevis.

2.2 Bevis av Clairauts sats

BEVIS. Två funktioner av en variabel definieras enligt

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x, b+h) - f(x, b) \\ G(y) &= f(a+h, y) - f(a, y), \end{aligned}$$

där F och G är deriverbara eftersom $f \in C^2$. Det kan nu konstateras att

$$F(a+h) - F(a) = G(b+h) - G(b). \quad (2)$$

Vidare utnyttjas medelvärdessatsen som ger

$$F(a+h) - F(a) = h \cdot F'(a + \theta_1 \cdot h), \quad \exists \theta_1 \in (0, 1). \quad (3)$$

När uttrycket skrivs om med f fås istället:

$$F(a+h) - F(a) = h \cdot (f_x(a + \theta_1 \cdot h, b+h) - f_x(a + \theta_1 \cdot h, b)) \quad (4)$$

Medelvärdessatsen används på samma sätt för G vilket ger:

$$\begin{aligned} G(b+h) - G(b) &= h \cdot G'(b + \theta_2 \cdot h) = h \cdot (f_y(a+h, b + \theta_2 \cdot h) - f_y(a, b + \theta_2 \cdot h)), \\ &\quad \exists \theta_2 \in (0, 1) \end{aligned} \quad (5)$$

Insättning av (4) och (5) i (2) ger (6):

$$f_x(a + \theta_1 \cdot h, b+h) - f_x(a + \theta_1 \cdot h, b) = f_y(a+h, b + \theta_2 \cdot h) - f_y(a, b + \theta_2 \cdot h) \quad (6)$$

Eftersom $f \in C^2$ kommer $f_x, f_y \in C^1$ och därmed kan medelvärdessatsen användas ytterligare en gång för att få uttryck för f_{xy} :

$$\begin{aligned} f_x(a + \theta_1 \cdot h, b+h) - f_x(a + \theta_1 \cdot h, b) &= h \cdot f_{xy}(a + \theta_1 \cdot h, b + \theta_3 \cdot h), \\ &\quad \exists \theta_3 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Samma procedur genomförs för att få ett uttryck för f_{yx} :

$$\begin{aligned} f_y(a+h, b + \theta_2 \cdot h) - f_y(a, b + \theta_2 \cdot h) &= h \cdot f_{yx}(a + \theta_4 \cdot h, b + \theta_2 \cdot h), \\ &\quad \exists \theta_4 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Insättning av (7) och (8) i (6) ger (9).

$$f_{xy}(a + \theta_1 \cdot h, b + \theta_3 \cdot h) = f_{yx}(a + \theta_4 \cdot h, b + \theta_2 \cdot h) \quad (9)$$

Det återstår nu att låta $h \rightarrow 0$, vilket resulterar i att

$$(a + \theta_4 \cdot h, b + \theta_2 \cdot h) \rightarrow (a, b) \quad (10)$$

samt

$$(a + \theta_1 \cdot h, b + \theta_3 \cdot h) \rightarrow (a, b). \quad (11)$$

Eftersom $f \in C^2$ är f_{xy} och f_{yx} kontinuerliga, vilket medför, enligt (9) att $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. $\square$

2.3 Transformationer och kedjeregeln

Då en transformation används för att lösa differentialekvationer används kedjeregeln för flera variabler. Hur kedjeregeln nyttjas demonstreras med ett räkneexempel:

EXEMPEL: Transformera f_{xy} till de nya variablerna $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$

LÖSNING: Med hjälp av kedjeregeln fås ett uttryck för f_x :

$$f_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x = f_u + f_v \cdot y. \quad (12)$$

För enkelhetens skull sätts $g = f_u$ och $h = f_v$.

f_{xy} tas fram genom partiell derivering med avseende på y där produktregeln används för produkten $f_v \cdot y$. Därefter används kedjeregeln igen för att transformera g_y och h_y , vilket ger:

$$g_y = g_u \cdot u_y + g_v \cdot v_y = g_u + g_v \cdot x = f_{uu} + f_{uv} \cdot x \quad (13)$$

och

$$h_y = h_u \cdot u_y + h_v \cdot v_y = h_u + h_v \cdot x = f_{vu} + f_{vv} \cdot x. \quad (14)$$

Vid insättning i uttrycket för f_{xy} fås nu istället:

$$f_{xy} = f_{uu} + f_{uv} \cdot x + f_v + y \cdot (f_{vu} + f_{vv} \cdot x) \quad (15)$$

Här används Clairauts sats för $f_{uv} = f_{vu}$ vilket ger svaret:

$$f_{xy} = f_{uu} + u \cdot f_{uv} + v \cdot f_{vv} + f_v. \quad (16)$$

3 Hitta och klassificera kritiska/stationära punkter

Följande tre punkter är definitioner för *kritiska/stationära punkter*, *lokala extrempunkter* och kopplingen mellan dessa.

1. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. f sägs ha en *kritisk/stationär punkt* i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ om $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
2. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, och $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. f sägs ha en *lokal maximipunkt* i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ om $\exists \epsilon > 0$ s.a. $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ då $0 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \epsilon$. Om $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ för $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ är punkten en *sträng lokal maximipunkt*. Omvända olikheter gäller för *lokala minimipunkter*.
3. Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar och har en lokal extrempunkt i $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, då är $\mathbf{a}$ en kritisk punkt till f .

Med (1) ovan kan vi hitta kritiska/stationära punkter till funktioner av flera variabler. Genom att sätta $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ och lösa ett ekvationssystem med n obekanta får vi fram de kritiska/stationära punkterna. Men för att klassificera dessa kommer vi att behöva Taylorutveckling i flera variabler.

3.1 Taylorutveckling

$$f : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{K+1}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^K$$
$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{j=0}^K \frac{(\mathbf{h} \bullet \nabla)^j}{j!} f(\mathbf{a}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^{K+1}) \quad (17)$$

För att bevisa Taylorutveckling i två variabler kring (a, b) kan vi välja att fixera h och k och introducera variabeln t . Vi kan nu studera funktionen som en envariabelsfunktion.

$$F(t) = f(a + th, b + tk)$$
$$F(t) = \sum_{j=0}^K \frac{F^{(j)}(t)}{j!} t^j + \frac{F^{(K+1)}(\xi)}{(K+1)!} t^{(K+1)}, \quad \exists \xi \in (0, t) \quad (18)$$

Vi ansätter sedan $g_1(t) = a + th$ och $g_2(t) = b + tk$. Härifrån kan vi använda kedjeregeln för att derivera $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ med avseende på t . $g_1'(t) = h$ och $g_2'(t) = k$.

$$F'(t) = f_x(a + th, b + tk) \cdot g_1'(t) + f_y(a + th, b + tk) \cdot g_2'(t) =$$
$$h \cdot f_x(a + th, b + tk) + k \cdot f_y(a + th, b + tk) \quad (19)$$

Deriveringar av högre ordningen kan uttryckas som:

$$F^{(j)}(t) = D^j f(a + th, b + tk) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^j f(a + th, b + tk) \quad (20)$$

Behagligt nog kan vi använda binomialsatsen så länge $f \in C^j$ via Clairauts sats. För att förenkla lite använder vi notationen $F^{(j)}(t) = (\mathbf{h} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ (där $\mathbf{a} = (a, b)$ och $\mathbf{h} = (h, k)$), vi sätter nu $t = 1$ och får då att $F(1) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$. Insättning i Taylorutveckling för envariabel ger då:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{j=0}^K \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j}{j!} f(\mathbf{a}) + \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla)^{K+1} f(\boldsymbol{\xi})}{(K+1)!} \quad (21)$$

$\boldsymbol{\xi}$ ligger mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{a} + \mathbf{h}$. Eftersom $f \in C^{K+1}$ är alla partiella derivator av ordning $K+1$ begränsade på sträckan. Således är feltermen ett monom av grad $K+1$ i h och k vars koefficient är begränsad. Vi kan därmed skriva om Taylorutvecklingen till följande:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{j=0}^K \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j}{j!} f(\mathbf{a}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{h}\|^{K+1}) \quad (22)$$

□

3.1.1 Taylorutveckling för grad 2

När funktioner ska undersökas kan det vara användbart att använda Taylorutveckling. Det är dock orimligt att utveckla för hundratals termer, istället väljer vi att utveckla för grad 2 vilket är användbart i många fall. Låt oss utveckla term för term.

Första termen blir endast:

$$f(a, b) \quad (23)$$

Den andra blir:

$$(h, k) \bullet (f_x(a, b), f_y(a, b)) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \quad (24)$$

.

Vidare blir nästa:

$$\begin{aligned} & \frac{((h, k) \bullet (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}))^2 f(a, b)}{2} = \\ & = \frac{1}{2} (h^2 f_{xx}(a, b) + hk f_{xy}(a, b) + hk f_{yx}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)) \end{aligned} \quad (25)$$

Via Clairauts sats kan vi emellertid skriva $f_{xy} = f_{yx}$. Denna typ av funktion kallas binär kvadratisk form $Q(h, k)$.

$$Q(h, k) = (h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)) \quad (26)$$

Sammansättning ger då:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + \frac{1}{2}Q(h, k) + \mathcal{O}(\|(h, k)\|^3) \quad (27)$$

3.2 Klassificera kritiska punkter m.h.a. $Q(h, k)$

Med hjälp av funktioner på binär kvadratisk form $Q(h, k)$ kan vi klassificera kritiska punkter. Vi skriver om funktionen och använder istället variablerna x och y , så att funktionen $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på formen

$$Q(x, y) = f_{xx} \cdot x^2 + f_{xy} \cdot 2xy + f_{yy} \cdot y^2, \quad (28)$$

blir

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad A, B, C \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

där

$$\begin{cases} A = f_{xx}(a, b) \\ B = f_{xy}(a, b) \\ C = f_{yy}(a, b) \end{cases} \quad (30)$$

SATS 1. För $Q(x, y)$ gäller:

1. Om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0$ så är Q positivt definit
2. Om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0$ så är Q negativt definit
3. Om $AC - B^2 < 0$ så är Q indefinit
4. Om $AC - B^2 = 0$ så är Q semidefinit

För att lättare se hur $AC - B^2$ avgör vilken slags kvadratisk form det är, kan uttrycket med hjälp av kvadratkomplettering skrivas om till följande. $A \neq 0$

$$Q(x, y) = A \left[\left(x + \frac{B}{A}y \right)^2 + (AC - B^2) \left(\frac{y}{A} \right)^2 \right] \quad (31)$$

BEVIS. Till en början studeras $AC - B^2 > 0$. Eftersom $(AC - B^2) > 0$, kommer hela uttrycket innanför $[\]$ alltid att vara ≥ 0 , då de andra paranteserna är kvadrater och därmed ≥ 0 . Dessa två paranteser har endast ett nollställe, när $x + \frac{B}{A}y = \frac{y}{A} = 0$ vid $(0, 0)$, och är annars > 0 . I detta fall avgör alltså tecknet av A hela uttryckets tecken vilket bevisar

punkt 1 och 2 i sats 1.

Då vi har satt $A \neq 0$, kan vi se att om $AC - B^2 < 0$, kan uttrycket anta både negativa och positiva värden, vilket i sin tur bevisar punkt 3 i Sats 1 då $A \neq 0$. Man kan föra ett motsvarande resonemang om $C \neq 0$, bara låt x och y byta roller. Om $A = C = 0$ så är $AC - B^2 = -B^2$. Detta är aldrig positivt, och är endast 0 då $B = 0$. I så fall har vi nu $A = B = C = 0$ och Q är tydligen semidefinit, i enlighet med punkt 4 i Sats 1. Om $A = C = 0$ och $B \neq 0$, så är $Q(x, y) = 2Bxy$, vilket uppenbarligen kan anta både positiva och negativa värden beroende på tecknen hos x och y . Då är punkt 3 helt bevisad.

Det som återstår är att studera fallet då $AC - B^2 = 0$, men minst ett av A och C är skilt från noll. Från symmetrin kan vi anta att $A \neq 0$ så att (31) gäller och blir till $Q(x, y) = A(x + \frac{B}{A}y)^2$. Det är klart att $Q(x, y)$ alltid har samma tecken som A , men $Q(x, y) = 0$ längs linjen $x + \frac{B}{A}y = 0$. Q är således semidefinit, i enlighet med punkt 4.

ANMÄRKNING. De fyra fallen ovan täcker alla möjligheter för koefficienterna A, B, C ty om $A = 0$ så kan $AC - B^2$ inte vara strängt positiv. $\square$

SATS 2. Med Sats 2.6.12 från boken kan vi även, m.h.a. satsen ovan, klassificera kritiska punkter. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och antag att $f \in C^3$ för enkelhetens skull. Låt (a, b) vara en stationär punkt till f .

1. Q är positivt definit $\implies f$ har strängt lokalt minimum i (a, b)
2. Q är negativt definit $\implies f$ har strängt lokalt maximum i (a, b)
3. Q är indefinit $\implies f$ har sadelpunkt i (a, b)
4. Q är semidefinit $\implies$ går ej att avgöra. En måste antingen Taylorutveckla i högre grad eller undersöka punkten på annat vis.

4 Vektorvärda funktioner

4.1 Funktionalmatrisen

Betrakta den vektorvärda funktionen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, där $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ innebär att koordinaterna ges av:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_i(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$$

Hela uppsättningen av $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ s partiella derivator definierar $\mathbf{F}$ s så kallade funktionalmatris vilket är $p \times n$ matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

som även kan ha notationen $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ eller $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

4.2 Linjärisering

Med funktionalmatrisen kan en linjärisering för vektorvärda funktioner skrivas på kompakt form. För en funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_p)$, som är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ges linjäriseringen i $\mathbf{a}$ av:

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \boldsymbol{\rho}(\mathbf{h}) \quad (32)$$

där $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}_m$ då $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}_n$.

4.3 Kedjeregeln i vektorvärda funktioner

Här ska definitionen för kedjeregeln presenteras för att gälla vektorvärda funktioner. Definiera $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ samt punkten $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Betrakta sedan sammansättningen $D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{t})$. Den allmänna formeln av kedjeregeln i vektorvärda funktioner är då

$$D(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})(\mathbf{t}) = D\mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{t})) \cdot D\mathbf{G}(\mathbf{t}). \quad (33)$$

4.4 Funktionaldeterminanter

Om vektorfältet $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ är definierat i $\mathbb{R}^n$ och samtidigt har sina värden i $\mathbb{R}^n$, det vill säga $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ges naturligtvis en kvadratisk funktionalmatris av typ $n \times n$ vars determinant kan beräknas. Funktionaldeterminanten för ett vektorfält definieras som

$$\det(\mathbf{F}'(\mathbf{x})) = \frac{d(\mathbf{f})}{d\mathbf{x}} = \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (34)$$

vilken också benämns som Jacobianen av $\mathbf{F}$.

4.5 Inversa Funktionssatsen

Låt $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -avbildning och $\mathbf{a}$ en punkt i definitionsmängden sådan att

$$\det(\mathbf{F}'(\mathbf{a})) \neq 0.$$

Då finns det öppna omgivningar U och V sådana att avbildningen $\mathbf{F} : U \rightarrow V$ är bijektiv och att inversen $\mathbf{F}^{-1} : V \rightarrow U$ också är en funktion av klassen C^1 .

EXEMPEL MED KOORDINATBYTEN:

Låt $\mathbf{F}$ vara avbildningen från Cartesiska till polära koordinater i xy -planet i området utanför origo så att

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (35)$$

Då ger funktionaldeterminanten att $\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = r \neq 0$ ty

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad (36)$$

Naturligt ges då $\mathbf{F}$ s inversa funktion $\mathbf{F}^{-1}$ av

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (37)$$

och dess funktionaldeterminant $\frac{d(r,\theta)}{d(x,y)}$:

$$\frac{d(r,\theta)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r} \quad (38)$$

Vi ser då att sammansättningen av funktionerna (oavsett ordning) ger identitetsmatrisen och determinanten = 1.

$$\det(\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1}) = \det(\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}) = \frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} \cdot \frac{d(r,\theta)}{d(x,y)} = r \cdot \frac{1}{r} = 1 \quad (39)$$