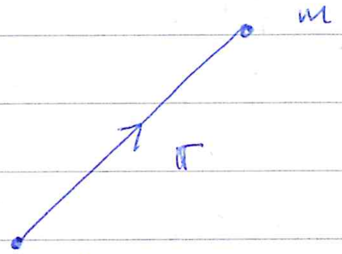
Föreläsning #20 FRÅN $\mathbb{R}^2$ TILL $\mathbb{R}^3$

Tre Viktiga Fysikaliska Exempel

(i) Newtons Gravitationslag



M, placerad i origo

$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbb{r}},$$

$$G = 6.67408 \times 10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$$

M.a.o. kraften som upplevs av den (lilla) punktmassan m pga existensen av den (stora) punktmassan M är

(i) proportionell mot både m och M

(ii) inverst proportionell mot avståndet mellan massorna i kvadrat

(iii) alltid riktad mot M.

Vi kan skriva ut $\mathbb{F}$ komponentvis:

$$\mathbb{F} = -GMm\frac{\mathbb{r}}{\|\mathbb{r}\|^3} \Rightarrow \ldots$$

$$\mathbb{F}(x,y,z) = -GMm\left(\frac{x,\ y,\ z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

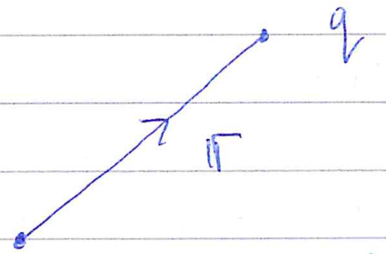
Definiera skalärfältet $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ enligt

$$\phi(x,y,z) = +\frac{GMm}{\|\mathbb{r}\|} = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Kan lätt kontrolleras att $\mathbb{F} = \nabla\phi$.

Gravitationsfältet $\mathbb{F}$ är alltså konservativt i sin domän $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

(2) Coulombs lag för Elektrostatik



Q, placerad i origo

En konstant då mediet är homogent

$$\mathbb{F} = \frac{CQq}{r^2}\,\hat{\mathbb{r}}, \quad C = \frac{1}{4\pi\varepsilon},$$ ε är mediets elektriska permettivitet

akuum: $C_0 = 8.987551 7923 \times 10^9 \ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$

$\Rightarrow \varepsilon_0 = 8.854187 8128 \times 10^{-12} \ \mathrm{Fm^{-1}}$

OBS! Laddningen Q ska vara stationär för att kraften som upplevs av laddningen q ska ges av Coulombs lag.

Till skillnad från Gravitationslagen så kan den elektrostatiska kraften vara attraktiv eller repulsiv beroende på laddningarnas tecken.

så länge mediet är homogent ($\Rightarrow C =$ konstant)

Men matematiskt är situationen annars identisk som med Gravitationslagen

Definiera skalärfältet $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ enligt

$$V(x,y,z) = \frac{-CQ}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{-CQ}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

Kan lätt kontrolleras att $\nabla V = \mathbb{F}/q$

Fältet $\mathbb{E} = \mathbb{F}/q = \frac{CQ}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ brukar

kallas för det <u>elektr(-ostat)iska fältet</u> som "produceras" av punktladdningen Q

Fälten $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ är alltså konservativa i sina domän $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

③ Biot-Savart lagen för magnetism

Det magnetiska fältet $\mathbb{B}(x,y,z)$ som produceras av en konstant ström I i positiv riktning i en oändlig och infinitesmalt tunn ledare längs z-axeln ges av

$$\mathbb{B}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right), & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ \text{odefinierat } (+\infty), & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Notera att $\mathbb{B}$ är alltså odefinierat längs hela z-axeln.

μ är mediets s.k. <u>magnetiska permeabilitet</u>. För ett homogent medium så är μ en konstant. I synnerhet $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} NA^{-2}$ (vakuum)

$\mathbb{B}$'s z-komponent, dvs dess komponent i strömmens riktning är noll. Det kan därmed betraktas som ett 2-D vektorfält i ett ortogonalt plan, t.ex. xy-planet.

För ett homogent medium är $\mathbb{B}$ således, upp till en konstant faktor, samma fält som i sista exemplet i Fö-18.

till skillnad från gravitations- och det elektrostatiska fältet

* $\mathbb{B}$ är virvelfritt men inte konservativt

Går vi tillbaka till $\mathbb{R}^3$ så ges $\mathbb{B}$'s definitionsmängd av

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

OBS! För både gravitationsfältet och det elektrostatiska fältet var definitionsmängden

- $\mathbb{R}^3$ minus en punkt

Däremot för magnetfältet är det

- $\mathbb{R}^3$ minus en linje.

Vi kommer att se att denna skillnad är väsentlig i den matematiska analysen, eftersom fälten i 1 och 2 är också virvelfria: ok, dessa fält är "verkligen" 3-dimensionella så vi måste först definiera virvelfritt i 3-D, men notera att om man bara glömmer z-komponenten (sätt $z := 0$) så får man, upp till en konstant faktor, fältet

$$\mathbb{F}(x,y) = (P,Q) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

Man kontrollerar lätt att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Två Omformuleringar av Greens Sats

1. <u>Def</u> Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^3$ vara ett C^1-vektorfält. <u>Rotationen</u> av $\mathbb{F}$ är vektorfältet som ges av

$$\text{rot}(\mathbb{F}) = \text{curl}(\mathbb{F}) = \nabla \times \mathbb{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

<u>Ex</u> Beräkna curl($\mathbb{F}$) där

$$\mathbb{F}(x,y,z) = \left(xy^2 + \tfrac{1}{2}x^2,\ x^2y + \ln z,\ e^{xy} + z^3/3 \right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= xe^{xy} - 1/z \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 0 - ye^{xy} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 2xy - 2xy = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{curl}(\mathbb{F}) \\ &\quad \| \\ &(xe^{xy} - 1/z, \\ &-ye^{xy}, 0) \end{aligned}$$

Kom ihåg Greens Sats i planet:

$\mathbb{F} = (P, Q) \Rightarrow$

$$(*) \quad \oint_{\partial D} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Låt oss nu betrakta D som ~~ett~~ ytstycke i $\mathbb{R}^3$, nämligen som en del av xy-planet. Dess rand ∂D blir då också en (eller flera) kurvor i $\mathbb{R}^3$.

Vi kan också betrakta $\mathbb{F}$ som ett 3-D fält, nämligen $\mathbb{F} = (P, Q, 0)$.

$$\Rightarrow \text{curl}(\mathbb{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

nollor ty P, Q är funktioner av endast x & y $\Rightarrow P_z = Q_z = 0$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Notera att $\hat{k}$ är en enhetsnormal $\hat{N}$ till ytstycket D och att $dxdy = dS$ är areaelementet i D.

Därmed kan Greens Sats för D skrivas som:

$$\boxed{\oint_{\partial D} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N} \, dS}$$

För likhet ska ∂D vara positivt orienterad, dvs D ska ligga till vänster om färdriktningen. (S)

Observera att detta är ekvivalent med att

$$\boxed{\hat{N} \times \overrightarrow{dr} \text{ pekar in mot } D}$$

Nästa vecka ska vi bevisa Stokes Sats (Sats 10.3.2). Den säger i princip att ~~[illegible]~~ resultatet ovan gäller, inte bara för ett ytstycke i xy-planet, men för vilken som helst C^1-ytstycke i $\mathbb{R}^3$.

② **Def** Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^3$ vara ett C^1-vektorfält. **Divergensen** av $\mathbb{F}$ är skalärfältet som ges av

$$\mathrm{div}(\mathbb{F}) = \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ex: Beräkna $\mathrm{div}(\mathbb{F})$ för samma $\mathbb{F}$ som tidigare.

$$\mathrm{div}(\mathbb{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2 + \tfrac{1}{2}x^2\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y + \ln z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^3/3 + e^{xy}\right)$$

$$= y^2 + x^2 + z^2 = \|\mathbb{r}\|^2 \; (= \rho^2)$$

Nu tillbaka till Greens Sats. Vi utgår ifrån (*) och introducerar ett nytt fält $\mathbb{G}$ enligt $\mathbb{G} = (+Q, -P)$

(*) gäller för ett godtyckligt $\mathbb{F}$ så det gäller för ett godtyckligt $\mathbb{G}$.

Vi kan också betrakta allting i $\mathbb{R}^3$ såsom tidigare och sätta $\mathbb{G} = (+Q, -P, 0)$.

$\longrightarrow$

HL av (*) blir då:

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial G_3}{\partial z}}_{=0} \right) dx\,dy$$

$$= \iint_D (\operatorname{div} \mathbb{G})\, dx\,dy = \iint_D (\nabla \cdot \mathbb{G})\, dx\,dy$$

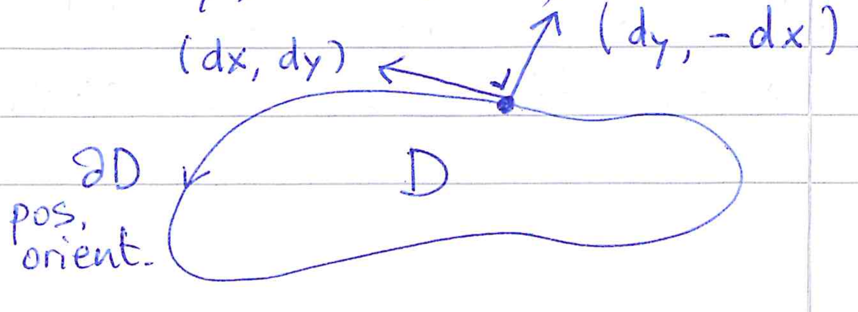
Låt D^* vara en "cylinder" med bas D i xy-planet och konstant höjd 1. Då är (enligt Fubini om du vill)

$$\iint_D (\nabla \cdot \mathbb{G})\, dx\,dy = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbb{G})\, dx\,dy\,dz \quad \ldots (1)$$

Betrakta nu i stället VL av (*).

$$\mathbb{F} = (P, Q), \quad d\mathbb{r} = (dx, dy)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} &= P\,dx + Q\,dy \\ &= -G_2\,dx + G_1\,dy \\ &= G_1\,dy - G_2\,dx + 0 \cdot dz \\ &= \mathbb{G} \cdot (dy, -dx, 0) \end{aligned}$$



Vektorn $(dy, -dx)$ är alltså en normal till ∂D och pekar <u>ut</u> från D.

$\Rightarrow$ Vektorn $(dy, -dx, 0)$ är en normal till den runda delen av ytan ∂D^* och pekar <u>ut</u> från D^*

Eftersom D^* har konstant höjd 1 kan vi denna gång (Fubini) ersätta kurvintegralen $\oint_{\partial D} \mathbb{G} \cdot (dy, -dx)$

med en dubbelintegral över den runda delen av ∂D^*

$$\oint_{\partial D} \mathbb{G} \cdot (dy, -dx) = \underset{\substack{\partial D^*, \\ \text{runda delen}}}{\oiint} \mathbb{G} \cdot \hat{N} \, dS ,$$

där $dS = dx\,dy$ är areaelementet på ∂D^* och $\hat{N}$ är en enhetsnormal som pekar <u>ut</u> från D^*.

∂D^* har också en "topp" och en "botten" men på dessa är $\hat{N} = (0,0,1)$, resp. $\hat{N} = (0,0,-1)$, så $\mathbb{G} \cdot \hat{N} = 0$, ty $\mathbb{G}$ har ingen z-komponent.

Alltså har vi visat att

$\longrightarrow$

$$\oint_{\partial D} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \oiint_{\text{hela } \partial D^*} \mathbb{G} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS \quad \ldots (2)$$

Vi sätter ihop (1) och (2) och får

$$\boxed{\oiint_{\partial D^*} \mathbb{G} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbb{G})\, dV, \qquad (G)}$$

där ∂D^* är randytan till det kompakta området $D^* \subseteq \mathbb{R}^3$ och enhetsnormalen $\hat{\mathbb{N}}$ alltid pekar <u>ut</u> från D^*

Nästa vecka ska vi bevisa Gauss Divergens Sats (Sats 10.2.1) som säger i princip att resultatet ovan gäller, inte bara för en cylinder vars axel är // med z-axeln, men för vilket som helst kompakt, kvadrerbart område i $\mathbb{R}^3$ vars rand består av C^1-ytstycken.

* Vi kommer att göra Gauss innan Stokes faktiskt (beviset är enklare, i princip samma bevis som för Greens i $\mathbb{R}^2$). Men först måste vi göra en formell definition av den sortens ytintegral som förekommer i VL av (G).

Flödesintegraler

Def: Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän, $Y \subseteq \Omega$ en sluten och styckvis C^1-yta och $\mathbb{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ett kontinuerligt vektorfält. Flödet av $\mathbb{F}$ ut genom Y ges av

cirkeln indikerar att Y är sluten

$$\oiint_Y \mathbb{F} \cdot \hat{N} \, dS,$$

där $\hat{N}$ är en enhetsnormal till Y som i varje punkt pekar ut från Y.

OBS!

(i) Att Y är sluten innebär för vår del att $\mathbb{R}^3 \setminus Y$ består av två sammanhängande komponenter, s.k. insidan och utsidan av Y där insidan är en begränsad mängd.

(ii) Att Y är styckvis-C^1 innebär att vi kan dela upp ytan $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$ s.a. för varje i finns det en C^1-parametrisering $\mathbb{r} : D_i \to Y_i$ där $D_i \subseteq \mathbb{R}^2$ är en kompakt & kvadrerbar mängd.

$\Rightarrow$ Om Y är sluten och styckvis C^1 så

Tillägg: "Flödet ut ur K" betyder samma sak som (kropp) "Flödet ut genom ∂K"

Kommer dess insida K vara en kvadrerbar mängd, $Y = \partial K$ och $K \cup \partial K$ blir kompakt.

(iii) För en icke-sluten yta Y (t.ex. en halvsfär) kan man inte tala om flöde "ut/in" genom Y. Men man kan fortfarande tala om flöde "upp/ner" genom Y. Då måste man välja $\hat{N}$ s.a. den har alltid en positiv/negativ z-komponent.

Ex. 1 Bestäm flödet av $\mathbb{F} = (x, z, 0)$ ut ur enhetstetrahedern $T = T_{3,1}$ $= \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

Lösning Tja, vi har inte bevisat Gauss Sats ännu (som skulle ersätta flödesintegralen över ∂T med en trippelintegral över T) så det enda vi kan göra är att dela upp ∂T i dess 4 triangulära sidor och beräkna flödet ut genom varje sida för sig m.h.a. en lämplig parametrisering

$$\oiint_{\partial T} \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS = \sum_{i=1}^{4} \iint_{S_i} \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS$$

$\underline{\underline{S_1}}$ Sidan som hör till xy-planet

$dS = dx\,dy \qquad \hat{N} = (0,0,-1)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{F} \cdot \hat{N} = 0$

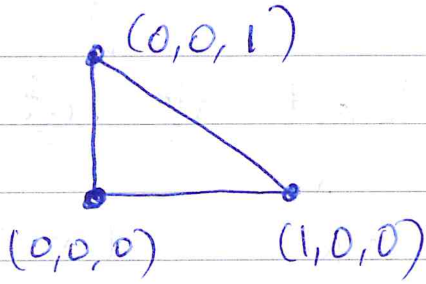
$\Rightarrow \quad \iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS = 0 \quad \ldots \quad (1)$

$\underline{\underline{S_2}}$ Sidan som hör till xz-planet

$dS = dx\,dz \qquad \hat{N} = (0,-1,0)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{F} \cdot \hat{N} = -z$

$\Rightarrow \quad \iint_{S_2} -z\,dx\,dz$



$= -\int_0^1 z\,dz \int_0^{1-z} dx = \int_0^1 z(z-1)\,dz = -1/6$

$\Rightarrow \quad \iint_{S_2} \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS = -1/6 \quad \ldots \quad (2)$

$\underline{\underline{S_3}}$ Sidan som hör till yz-planet

$dS = dy\,dz \qquad \hat{N} = (-1,0,0)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{F} \cdot \hat{N} = -x = 0$ i yz-planet

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow \iint_{S_3} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = 0 \quad \ldots (3)$$

$\underline{S_4}$ Sidan som hör till planet $x+y+z=1$

Funktionsyta $z = f(x,y) = 1-x-y$

$$\Rightarrow dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy = \sqrt{3}\,dx\,dy$$

$\hat{N}$ är enhetsnormal till planet

$$\Rightarrow \hat{N} = \pm \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

klart att $\underline{\text{ut}}$ från $T \Rightarrow +$ tecknet

$$\Rightarrow \mathbb{F}\cdot\hat{N} = (x,z,0)\cdot\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{x+z}{\sqrt{3}}$$

$$= 1/\sqrt{3}\,(x+(1-x-y)) = 1/\sqrt{3}\,(1-y)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_4} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{\pi_{xy}(S_4) = S_1} \frac{1}{\sqrt{3}}(1-y)\sqrt{3}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)\,dy \int_0^{1-y} dx = \int_0^1 (1-y)^2\,dy$$

$$= \int_0^1 y^2\,dy = 1/3$$

$\longrightarrow$

Så $\iint_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 1/3 \quad \ldots (4)$

$(1) + (2) + (3) + (4) \Rightarrow$

$$\oiint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = 0 - 1/6 + 0 + 1/3 = 1/6 .$$

<u>OBS!</u> Vi kommer att se att denna uppgift blir gör lätt om vi använder i stället Gauss Sats, i alla fall om vi kommer ihåg från Fö-13, Ex. 1 att vol (T) = 1/6.