

Sammanfattning Grupp 3A MVE035

Emil Babayev,
Samuel Edlund,
My Irenheim Jarlhed,
Marcus Johansson,
Simon Norin,
Felix Uddén

23 februari 2021

1 Föreläsning 1

1.1 Implicita funktionssatsen

En funktionsgraf kan ge ett y -värde för varje x -värde. Så är däremot inte alltid fallet med implicit givna funktioner, där ibland ett värde i definitionsmängden svarar mot flera värden i värdemängden. Ett exempel på detta är enhetscirkeln, där varje x -värde svarar mot två y -värden. Detta går däremot att komma undan om man studerar implicit givna funktioner lokalt, eftersom följande sats gäller.

Sats 1. Låt $F(\mathbf{x})$ vara en C^1 -funktion och $\mathbf{a}$ en punkt på nivåytan $F(\mathbf{x}) = C$ där C är en konstant. Om $\frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \neq 0$ finns det en omgivning U av $\mathbf{a}$ s.a. restriktionen av nivåytan till U implicit definierar en C^1 -funktion av $n - 1$ variabler $f_k((x_1, \dots, x_{k-1}), (x_{k+1}, \dots, x_n)) = x_k$. Vidare gäller:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{-F_{x_j}}{F_{x_k}} \quad (1)$$

Moralen med denna sats är att om man låter funktionen inskränkas av en omgivning till en viss punkt, dvs studerar funktionen lokalt kring en viss punkt, går det alltså att skriva upp ett funktionsuttryck av alla icke-problematiske variabler/punkter.

I exemplet med enhetscirkeln kan den definieras som en funktionsgraf $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ så länge vi inte befinner oss på $x = \pm 1$ eftersom det inte går att skriva upp en funktionsgraf $y = f(x)$ där (gradienten pekar i x -riktningen).

1.2 Dubbelintegraler: att integrera funktioner av två variabler

I envariabelanalysen existerar begreppet antiderivata enligt $\int_a^b f(x) dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$. Men i flervariabelanalysen existerar det inte någon derivata i denna bemärkelse och därmed inte heller någon antiderivata. Detta beror på att lutningen av exempelvis ett plan i en bestämd punkt inte är entydigt bestämd. För att kunna prata om integraler av flera variabler, härifrån $z = f(x, y)$, kan de istället ses som en volym mellan en begränsad och öppen yta D i xy -planet och en funktionsyta. Dubbelintegralen betecknas $\iint_D f(x, y) dx dy$ där $dx dy$ kan ses som en infinitesimal area multiplicerat med en höjd $z = f(x, y)$, vilket ger en volym.

För att beräkna dessa kan man dels använda sig av att integration av flera variabler är en linjär operation, dels att symmetri kan förekomma. Linjäritet ger att:

$$\iint_D \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

där α och β är konstanter och f och g är två kontinuerliga funktioner av två variabler. Symmetrin kan istället användas för att förenkla till synes svåra beräkningar. Exempelvis dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{y \sin(x)}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

där $D = [-2, 2] \times [1, 2]$. Denna är lätt att integrera med avseende på y men sedan betydligt svårare med avseende på x . Med hjälp av symmetri kan man dock se att funktionen är udda runt x -axeln, samt att rektangeln D är symmetrisk runt x -axeln. Därför blir dubbelintegralen 0.

2 Föreläsning 2

2.1 Fubinis sats och upprepad integration

Nu när vi upptäckt att antiderivata inte är ett väldefinierat begrepp i flervariabelanalys, måste vi göra lite förarbete för att kunna integrera. För att kunna skriva upp Fubinis sats som möjliggör upprepad integration tar vi fram två definitioner:

Definition 2.1. Om Δ är en axelparallell rektangel kan den skrivas $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ där $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $c \leq d$ är gränserna för rektangeln $\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Definition 2.2. Tag $D \subseteq \mathbb{R}^2$. D sägs vara reguljär om området kan delas in i ändligt många delar som beskrivs av C^1 -funktioner $y(x)$ och $x(y)$ i x och y -led respektive.

Alla axelparallella rektanglar är alltså reguljära områden. För reguljära områden gäller nu Fubinis sats om upprepad integration:

Sats 2 (Fubini). Låt $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a(x) \leq y \leq b(x)\}$ vara ett reguljärt område i x -led, där $a, b \in C^1$. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då gäller

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) \quad (2)$$

alltså kan man integrera ett godtyckligt område som innesluts av funktionsgrafer i x eller y -led. För integration i y -led kan man bara byta plats på variablerna, och satsen gäller ändå.

Kontentan av denna sats är alltså att integration över reguljära områden i princip är att derivera partiellt baklänges. Intuitionen bakom detta är att man kan dela in varje infinitesimal volym i en area och en infinitesimal höjd, precis som tidigare diskussion presenterar. Man kan exempelvis beräkna arean i x -led först och multiplicera med en liten y -bit dy , vilket ger ett rätblock. Det kan liknas vid att man skivar upp en limpa, där varje skiva har bredden dy och arean $A(x)$.

Användningen av denna sats illustreras bäst med två exempel:

Exempel 2.1. Tag $\Delta = [0, 1] \times [0, 2]$ och beräkna

$$\iint_{\Delta} \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy$$

Vi börjar med att integrera över x och sätter in gränserna. Därefter blir det en vanlig integral i en variabel, y :

$$\int_0^2 dy \left(\int_0^1 \frac{1}{((1+y)+x)^2} dx \right) = \int_0^2 \left[\frac{-1}{(1+y)+x} \right]_0^1 dy = \int_0^2 \frac{-1}{2+y} + \frac{1}{1+y} dy = \dots = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Det är enkelt att kontrollera att det blir samma värde på integralen även vid integration med y först.

På axelparallella rektanglar är det alltså hyfsat lätt att integrera. Nu till ett lite svårare område:

Exempel 2.2. Tag $D = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$ och beräkna

$$\iint_D \frac{x}{1+y^2} dx dy$$

Vi ser att denna integral antagligen är enklare att beräkna i x -led först. Vi väljer därför att betrakta området som reguljärt i y -led och skriver upp det som $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$. Nu beräknar vi först i y -led och sedan i x -led:

$$\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \left(\int_0^{\sqrt{y}} x dx \right) = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} = \dots = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y}{1+y^2} dy = \dots = \frac{1}{4} \ln 2$$

2.2 Variabelbyten del 1

Sats 3 (6.4.6). Låt

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande obegränsat område D i xy -planet sådant att $\exists J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$. Då gäller:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (3)$$

3 Föreläsning 3

3.1 Variabelbyte del 2

Varför Jacobideterminanten $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ kommer med i variabelbytet härleds på följande sätt:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ \Rightarrow dx dy &= \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \cdot du dv \end{aligned}$$

Exempel 3.1. Tag $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25, y \geq x\}$ och beräkna

$$\iint_D x^2 e^{x^2 + y^2} dx dy$$

Vi ser att denna dubbelintegral lämpar sig väl för polära koordinater då D beskriver ett cirkelsegment i xy -planet, vi sätter $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Vilket ger:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^5 r^2 \cdot \cos^2 \theta e^{r^2} r dr d\theta &= 2 \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^5 r^3 \cdot \cos^2 \theta e^{r^2} dr d\theta = 2 \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \int_1^{25} \frac{1}{2} u e^u du \\ &= \dots = \frac{1}{8} (\pi - 2) (24e^{25} + 1) \end{aligned}$$

3.2 Dubbelintegraler m.h.a nivåkurvor

Sats 4. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^1 -funktion och låt $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och givet ett kompakt kvadrerbart område $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b \quad \forall (x, y) \in D$. Då gäller:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du \quad (4)$$

Där $A(u) = \text{arean } \{(x, y) \mid g(x, y) \leq u\}$ och $h(u)$ är höjden av den arean.

Exempel 3.2. För $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x + 2y \leq 2\}$ beräkna:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + (x + 2y)^2)^2}$$

Enligt sats 3 så är $a = 1$, $b = 2$ samt $g(x, y) = x + 2y$ vilket ger att $h(u) = \frac{1}{(1+u^2)^2}$ alltså gäller:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + (x + 2y)^2)^2} = \int_1^2 h(u) A'(u) du$$

För att bestämma $A'(u)$ måste vi kolla på hur nivåkurvan ser ut, $x + 2y = 1$ och $x + 2y = 2$ skär x -axeln vid $(1, 0)$ respektive $(2, 0)$ och y -axeln vid $(0, \frac{1}{2})$, $(0, 1)$. Detta ger att $A(u) = A_u - A_1$ där $A_1 = 1 \cdot \frac{1}{4}$ alltså kommer $A(u) = u \cdot \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A'(u) = \frac{u}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{u}{(1 + u^2)^2} du = \dots = \frac{3}{40}$$

4 Föreläsning 4

4.1 Generaliserade dubbelintegraler

Precis som i envariabelanalys finns det dubbelintegraler $\iint_D f(x, y) dx dy$ där antingen

- i. f är obegränsad på ett begränsat område D .
- ii. D är ett obegränsat område.

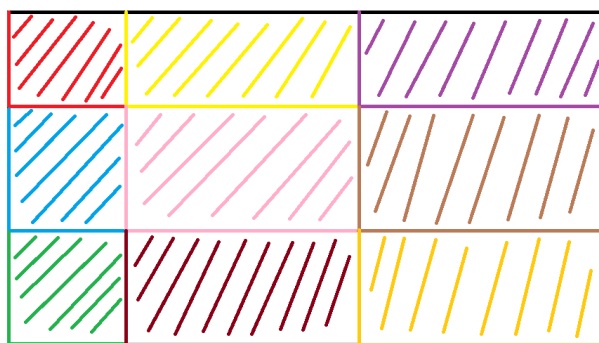
Det handlar då om huruvida dubbelintegralen existerar som en tecknad volym, och är ändlig. Formellt är frågan om ett visst gränsvärde existerar. De olika fallen behandlas på följande vis:

- i. I detta fall tar man bort mindre och mindre delar av D runt de punkter då $f \rightarrow \pm\infty$, och integrerar som vanligt över resten av D . Om gränsvärdet av dessa integraler existerar sägs det vara värdet av $\iint_D f(x, y) dx dy$.
- ii. I detta fall integrerar man D över större och större begränsade delar. Om dessa integraler går mot ett entydigt gränsvärde, oavsett hur D tecknas som en växande följd av begränsade delområden, sägs det vara värdet av $\iint_D f(x, y) dx dy$.

I praktiken integrerar man som vanligt, därefter får man oftast använda sig av en jämförelse med ett av följande resultat från envariabelanalysen:

- i. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 x^t = \begin{cases} \infty, & \text{då } t \leq -1 \\ \text{ändlig, annars.} \end{cases}$
- ii. $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N x^t = \begin{cases} \infty, & \text{då } t \geq -1 \\ \text{ändlig, annars.} \end{cases}$

4.2 Trappfunktioner



Figur 1: En illustration av en trappfunktion där varje rektangel och rand med samma färg har samma konstanta värde.

Definition 4.1. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallel rektangel. En funktion $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för en trappfunktion om det finns partitioner:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (5)$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \quad (6)$$

så att Φ har ett konstant värde på varje halvöppen delrektangel $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

Detta innebär att en delrektangel av trappfunktionen Φ med dess vänstra och undre kant har ett konstant värde vilket illustreras i figur 1.

Definition 4.2. Om vi behåller Δ och Φ från definition 4.1 och låter C_{ij} vara det konstanta värdet av Φ på delrektangeln $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$. Då kan dubbelintegralen av $\Phi(x, y)$ över Δ skrivas,

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} C_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j). \quad (7)$$

Den geometriska betydelsen av definitionen är tydlig. $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ är arean av varje delrektangel och varje delrektangel har ett konstant värde C_{ij} , vilket ger höjden på delrektanglarna. Därmed fås volymen av varje delrätblock med bas i delrektangeln som summeras över alla delrektanglar i Δ . Definitionen innebär också att dubbelintegralen av Φ över Δ kan skrivas som itererade enkelintegraler:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b \phi(x, y) dx. \quad (8)$$

Här är den geometriska betydelsen att $\int_a^b \Phi dx$ är arean av snittytan då Φ skärs med ett plan genom $(x, 0, 0)$. Sedan integreras denna area över alla y mellan c och d vilket ger hela volymen av Φ .

Definition 4.3. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. f sägs vara integrerbar över Δ om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ på Δ så att:

i. $\Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \forall (x, y) \in \Delta$

ii. $\iint_{\Delta} \Psi dx dy - \iint_{\Delta} \Phi dx dy < \epsilon$

Med hjälp av dessa definitioner och observationen att trappfunktioner kan skrivas som itererade enkelintegraler kan Fubinis sats bevisas (se 2.1). Idén är då att kontinuerliga funktioner jämförs med två trappfunktioner som uppfyller definition 4.3. Att Fubinis sats gäller för trappfunktioner är tydligt på grund av ekvation 8 och därmed kan man bevisa att Fubinis sats gäller för alla kontinuerliga funktioner.