

MVE035 Tavelpresentation grupp 2A

Lucas Abrahamsson, Gabriel Berggren, Hannes Björck, Nils Nerpin,
Gustav Nilsson, Elias Svensson

Januari 2021

1 Sats 2.5.9 (Clairauts sats)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän. Vi har en funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Om $f \in C^2(D)$ då gäller $\forall (a, b) \in D$ att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

OBS:

- $C^k(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ och alla dess partiella derivator av grad } \leq k \text{ är kontinuerliga funktioner}\}.$
- $f \in C^k(D)$ och $D \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow$ Ordningen spelar ingen roll för partiella derivator av grad $\leq k$.

Beviset för satsen går ut på att man definierar funktioner F och G av en variabel s.a. $F(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$ och $G(y) = g(a+h, y) - g(a, y)$. Sedan tillämpas medelvärdessatsen från envariabelanalys två gånger vilket tillslut bevisar satsen.

Clairauts sats kommer till nytta bl.a. då vi tillämpar kedjeregeln i flera variabler då det tillåter att samla termer.

2 Taylor sats i flera variabler

Vi börjar med att betrakta Taylor för en variabel.

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1}$$

för $\xi \in (a, a+h)$.

Vi vill ta fram en formel för $f(\vec{a} + \vec{h})$ då $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(D)$ och $\vec{a} \in D$.

Vi börjar med fallet $n = 2$.

Vi har alltså $f(a+h, b+k)$ och definerar en funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(t) = f(a+th, b+tk), \text{ fixera } h, k.$$

Så enligt ovan

$$F(t) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(0)}{j!} + \mathcal{O}(t^{k+1}).$$

Genom att tillämpa kedjeregeln kan man visa att

$$F^{(j)}(0) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^j f(a, b)$$

där $(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^j$ är differentialoperator som opererar på f .

Om vi väljer $t = 1$ så fås

$$F(1) = f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^k \frac{(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^j f(a, b)}{j!} + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^{k+1})$$

där $\|\vec{h}\| = (h, k)$.

Man kan därefter utvidga till ett godtyckligt antal variabler och få

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^j f(\vec{a})}{j!} + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^{k+1}).$$

$f(a+h, b+k)$ kan taylorutvecklas till grad 1 (1), grad 2 (2) eller till högre grader. Taylorutvecklingar till en grad över 2 är dock ofta ointressant för tillfället.

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,b)} + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^2) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,b)} \\ &\quad + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2kh f_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a,b)} + \mathcal{O}(\|\vec{h}\|^3) \end{aligned} \quad (2)$$

3 Klassificering av kritiska punkter i flera variabler

Låt funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar i punkten $\vec{x} = \vec{a}$. f sägs ha en kritisk/stationär punkt i $\vec{x} = \vec{a}$ om $\nabla f(\vec{a}) = 0$.

Funktionen f har ett lokalt maximum respektive minimum i punkten $\vec{x} = \vec{a}$ om $\exists \varepsilon > 0$ så att $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ respektive $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$ då $0 \leq |\vec{x} - \vec{a}| \leq \varepsilon$

Definera funktionen $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ där $Q \in C^3$. Q är på binär kvadratisk form och kommer från andra gradens taylorutveckling av f . Skriv nu Q som

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

Låt nu punkten (a, b) vara en stationär punkt till f . Sätt $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$ och $C = f_{yy}(a, b)$. Alltså har vi

$$Q = x^2 f_{xx}(a, b) + 2xy f_{xy}(a, b) + y^2 f_{yy}(a, b).$$

Då gäller följande:

- (i) Om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \implies$ punkten (a, b) är ett lokalt minimum för f .
- (ii) Om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \implies$ punkten (a, b) är ett lokalt maximum för f .
- (iii) Om $AC - B^2 < 0 \implies$ punkten (a, b) är en sadelpunkt, det vill säga varken en max eller min punkt för f .
- (iv) Om $AC - B^2 = 0 \implies$ satsen kan inte säga vilken sorts punkt det är. Dessa punkter får undersökas på andra sätt.

4 Vektorvärda funktioner i flera variabler

Notation: Vi har en funktion $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ av n st variabler. Då kan vi skriva:

$$\mathbb{F}(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)). \quad (3)$$

Nu kan differentierbarhet i flera variabler defineras enligt följande:

Def: Funktionen $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är differentierbar i punkten $\vec{x} = \vec{a}$ om varje delfunktion F_i är det i punkten $\vec{x} = \vec{a}$.

4.1 Linjärisering av vektorvärda funktioner

Låt $\mathbb{F} = (F_1, \dots, F_m)$ vara en funktion av m variabler som är differentierbar i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Funktionalmatrisen till $\mathbb{F}$ i punkten $\vec{a}$, vilken betecknas $D\mathbb{F}(\vec{a})$, är den $(m \times n)$ - matris vars (i, j) :te element är $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{a})$, d.v.s.

$$D\mathbb{F}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

En linjärisering kan nu skrivas som följande:

$$\mathbb{F}(\vec{a} + \vec{h}) = \mathbb{F}(\vec{a}) + D\mathbb{F}(\vec{a})\vec{h} + \|\vec{h}\|\rho(\vec{h}) \quad (4)$$

där $\rho(\vec{h}) \rightarrow \vec{0}_m$ då $\vec{h} \rightarrow \vec{0}_n$.

4.1.1 Kedjeregeln för linjära vektorvärda funktioner

$\mathbb{G}$ och $\mathbb{F}$ är två godtyckliga differentierbara vektorvärda funktioner.

$$\mathbb{G} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Den sammansatta funktionen $(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(\vec{t})$ skrivs då:

$$(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(t_1, \dots, t_n) = (F_1(G_1(t_1, \dots, t_n), \dots, G_p(t_1, \dots, t_n)), \dots, F_m(G_1(t_1, \dots, t_n), \dots, G_p(t_1, \dots, t_n))) \quad (5)$$

Om vi nu vill summera detta på ett enklare sätt kan vi skriva den som:

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(\mathbb{F} \circ \mathbb{G}) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\mathbb{G}(\vec{t})) \frac{\partial G_k}{\partial t_j}(\vec{t}) \quad (6)$$

Slår vi sedan ihop ekvation (5) och (6) för alla $i = 1, \dots, m$ och $j = 1, \dots, n$ fås:

$$D(\mathbb{F} \circ \mathbb{G})(\vec{t}) = D\mathbb{F}(\mathbb{G}(\vec{t}))D\mathbb{G}(\vec{t}) \quad (7)$$

Vilket är den mest allmänna formen av kedjeregeln.

5 Notation och determinanten av en funktional-matris

I ekvation 8 nedan följer vanlig notation för determinanten av en funktionalmatris, även kallad funktionaldeterminanten.

$$|D\mathbb{F}(\vec{a})| = \det(D\mathbb{F}(\vec{a})) = d\mathbb{F}(\vec{a}) \quad (8)$$

Vidare för någon funktion $\mathbb{F} : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ gäller:

$$D\mathbb{F} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \quad (9)$$

$$d\mathbb{F} = \frac{d\vec{y}}{d\vec{x}} \quad (10)$$

Om vi betraktar en sammansättning av funktioner sådana att $\mathbb{G}(\vec{t}) \rightarrow \vec{x}(\vec{t})$, $\mathbb{F}(\mathbb{G}(\vec{t})) \rightarrow \vec{y}(\vec{x}(\vec{t}))$ och sedan applicerar kedjeregeln blir uttrycken som följande:

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{t}} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} * \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{t}} \quad (11)$$

$$\frac{d\vec{y}}{d\vec{t}} = \frac{d\vec{y}}{d\vec{x}} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\vec{t}} \quad (12)$$

Där ”*” i ekvation 11 syftar på matrismultiplikation och ”.” i ekvation 12 syftar till multiplikation av tal.

6 Sats 3.3.2 Inversa funktionssatsen

Låt $\vec{y}$ vara en C^1 -funktion från $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ en punkt sådan att $\det(D\vec{F}(\vec{a})) \neq 0$. Då finns det öppna omgivningar U och V av $\vec{a}$ respektive $\vec{F}(\vec{a}) = \vec{b}$ så att avbildningen $\vec{F} : U \rightarrow V$ är bijektiv och dess invers F^{-1} också är en C^1 -funktion.