MVE035/600 Exercise session 6.2.

Wednesday, 24 February 2021   07:26

9.30: Är $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$ konservativt? Om ja, bestäm en potential.

Lösn. $\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -6xy \quad \forall x,y.$

$\Rightarrow$ F är konservativt!

Potentialfält:

$$\int P\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \phi(y), \quad \phi \in C^1(\mathbb{R})$$

$$=: U(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -3x^2y + \phi'(y) \overset{?}{=} Q(x,y)$$

då $\phi'(y) = y^3 \Rightarrow \phi(y) = \frac{y^4}{4} + \cancel{\text{const}}.$

$\boxed{\text{Alltså, } U(x,y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) - \frac{3}{2}x^2y^2 \text{ är en potential till } F.}$

---*---

9.3a: Beräkna $\int_\gamma \left(\sqrt{x^2-y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y}}\right)dx - \frac{x}{2\sqrt{x^2-y}}\,dy$,

där γ är kurvan $x = y^2$ från $(1,-1)$ till $(4,-2)$.

Lösn. Om $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

$$= \left(\sqrt{x^2-y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y}}, -\frac{x}{2\sqrt{x^2-y}}\right)$$

är konservativt och U en potential till F, så är

$$\int_\gamma \langle F, dr\rangle = \int_\gamma \langle \nabla U, dr\rangle = U(4,-2) - U(1,-1).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}} + x^2 \frac{1}{2(x^2-y)^{3/2}}$$

$\|$

$\partial Q \quad 1 \quad -2x \quad -1 \quad x^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{}{2\sqrt{x^2-y}} - \frac{x}{2}\cdot\frac{}{2(x^2-y)^{3/2}} = \frac{}{2\sqrt{x^2-y}} + \frac{}{2(x^2-y)^{3/2}}$$

$\rightarrow$ F är konservativt!

Potentialfält:

$$\int Q\,dy = \frac{-x}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{x^2-y}} = x\sqrt{x^2-y} + \phi(x) =: U(x,y),$$
$$\phi \in C^1(\mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{x^2-y} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y}} + \phi'(x)$$
$$\stackrel{!}{=} P(x,y) \quad \text{då } \phi' = 0, \text{ alltså } \phi = \text{konst},$$
$$\text{tag } \phi = 0.$$

Alltså, $U(x,y) = x\sqrt{x^2-y}$ är en potential till F och

$$\int_\gamma \langle F, dr\rangle = U(4,-2) - U(1,-1) =$$
$$= 4\sqrt{16+2} - 1\sqrt{1^2+1}$$
$$= 4\sqrt{18} - \sqrt{2} = 11\sqrt{2}.$$

10.62: Är $u(x,y,z) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2-2z)$ ett potentialfält? Beräkna

$$\int_\gamma \langle u, dr\rangle$$

längs γ: $r(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Lösn. $u = (P, Q, R)$

$$\begin{cases} \int P\,dx = x^2y^2z + \phi(y,z) \\ \int Q\,dy = x^2y^2z + \psi(x,z) \\ \int R\,dz = x^2y^2z - z^2 + \rho(x,y) \end{cases}$$

Tag $\rho = 0$ och $\phi = \psi = -z^2$

$\Longrightarrow U(x,y,z) = x^2y^2z - z^2$ är en potential till u.

$$\rightsquigarrow \int_\gamma \langle u, dr\rangle = U(\gamma_{\text{mål}}) - U(\gamma_{\text{start}})$$

$$= \{ \gamma_{start} = r(0) = (\cos 0, \sin 0, \sin 0) = (1,0,0), \quad \gamma_{slut} = r(\tfrac{\pi}{2}) = (0,1,1) \}$$

$$= U(0,1,1) - U(1,0,0)$$

$$= -1^2 - 0 = -1$$

PAUS till 16:09!

Sats (Green) Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara kompakt med en positivt orienterad, styckvis C^1 rand ∂D och P, Q två C^1-funktioner i en öppen omgivning av D.
Då är

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

9.10: Beräkna $\int_\gamma y^2 dx + x^2 dy$, där $\gamma = \partial D(a,b,r)$,
$D(a,b,r) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \}$.

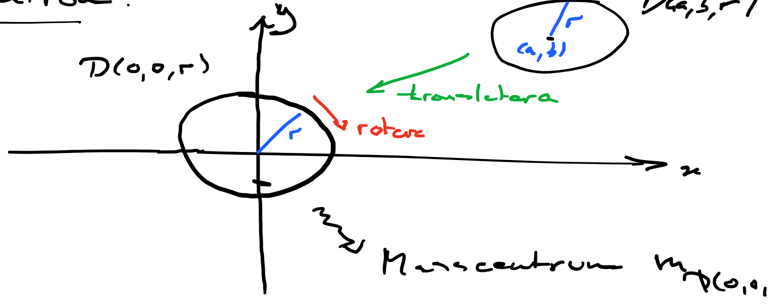
Lösn. Greens sats:

$$\int_\gamma y^2 dx + x^2 dy = \iint_{D(a,b,r)} (2x - 2y)\,dx\,dy$$

$$= 2\,\mathrm{vol}(D(a,b,r)) \Big(\frac{1}{\mathrm{vol}(D(a,b,r))} \iint_D x\,dx\,dy - \frac{1}{\mathrm{vol}(D(a,b,r))} \iint_D y\,dx\,dy \Big)$$

$$= 2\,\mathrm{vol}(D(a,b,r)) \left(m^x_{D(a,b,r)} - m^y_{D(a,b,r)} \right)$$

Masscentrum:



$\rightsquigarrow$ Masscentrum $m_{D(0,0,r)}$ är fixt under rotationer

$\Rightarrow m_{D(0,0,r)} = (0,0)$

$$\Longrightarrow m_{D(a,b,r)} = (a,b)$$

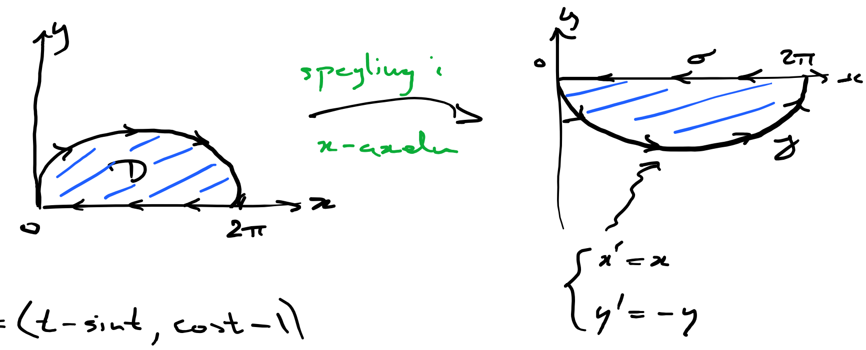
$$= 2\,\mathrm{vol}(D(a,b,r))(a-b)$$

$$= \underline{2\pi r^2(a-b)}.$$

9.24: Beräkna arean mellan x-axeln och "cykloidbågen"

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Lösn.



$$\rightsquigarrow \begin{cases} \gamma(t) = (t - \sin t, \cos t - 1) \\ \sigma(t) = (2\pi - t, 0) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Longrightarrow \mathrm{vol}(D) = \iint_D (1-0)\,dx\,dy = \{\text{Greens sats}\}$$

(P,Q): $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$

$$= \int_{\gamma\cup\sigma} 0\cdot dx + x\,dy$$

$$= \int_\gamma 0\cdot dx + x\,dy + \int_\sigma 0\cdot dx + x\,dy$$

$$= \{\gamma'(t) = (1-\cos t, -\sin t),\ \sigma'(t) = (-1, 0)\}$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (0, t - \sin t), (1 - \cos t, -\sin t) \rangle\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} \underbrace{\langle (0, 2\pi - t), (-1, 0) \rangle}_{=0}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-t\sin t + \sin^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt - \int_0^{2\pi} t\sin t\,dt.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cancel{\cos 2t})\,dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin t \, dt = \left[-t\cos t\right]_0^{2\pi} + \cancel{\int_0^{2\pi} \cos t \, dt}$$

$$= -2\pi \cos 2\pi = -2\pi$$

$$= \pi - (-2\pi) = \underline{\underline{3\pi}}.$$

Tekniker:

1. Parametrisera
2. Potentialer.
3. Green / Gauss / Stokes.