Demonstration 5

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2021

Dagens genomgång: 3.extra, 3.7(+ ytarea), 8.16, 9.4

Uppgift 3.extra

En partikel följer banan i planet som ges av

$$\boldsymbol{r}(t) = \left(t^2 - 2t, t^2 + 2t\right), \quad t \in [-1, 1]. \tag{1}$$

(i) Skissa banan.

(ii) Beräkna partikelns hastighet och fart vid $t = 1/3$.

(iii) Bestäm banans längd.

(iv) Om banan beskriver en frittfallande partikel i ett kraftfält $\boldsymbol{F}$, förklara varför $\boldsymbol{F}$ är konstant längs banan.

Lösning (i)

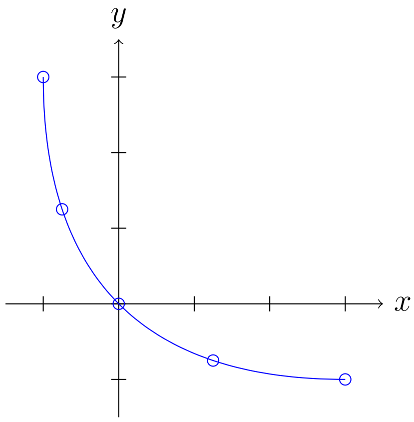
Vi kan börja med att ta fram några punkter, se Tabell 1.

Tabell 1: Punkter på banan.

t	x	y
-1	$1 + 2 = 3$	$1 - 2 = -1$
$-\frac{1}{2}$	$0.25 + 1 = 1.25$	$0.25 - 1 = -0.75$
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$0.25 - 1 = -0.75$	$0.25 + 1 = 1.25$
1	$1 - 2 = -1$	$1 + 2 = 3$

Vi kan notera att $\boldsymbol{r}(-t) = (t^2 + 2t, t^2 - 2t)$.

Låt oss nu skissa, då får vi något likt



Lösning (ii)

Hastigheten ges av tidsderivatan av positionen,

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (2t-2, 2t+2) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(2\cdot\frac{1}{3}-2, 2\cdot\frac{1}{3}+2\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right). \tag{2}$$

Farten ges av beloppet av hastigheten,

$$\left|\dot{\boldsymbol{r}}\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16+64}}{3} = \frac{\sqrt{80}}{3}. \tag{3}$$

Lösning (iii)

Längden ges av

$$\begin{aligned} l &= \int_\gamma |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \int_{-1}^{1} |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \sqrt{(2t-2)^2+(2t+2)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{(4t^2-8t+4)+(4t^2+8t+4)}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4}$$

Integralen här är lite jobbig, men kan beräknas med partiell intergration,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{t\cdot 2t}{2\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = t\sqrt{t^2+1} - \int \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= t\sqrt{t^2+1} - \int\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t, \\ \Longrightarrow\ 2\int\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= t\sqrt{t^2+1} + \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|, \\ \Longrightarrow\ \int_{-1}^{1}\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\left(1\sqrt{2}+\ln\left|1+\sqrt{2}\right| - (-1)\sqrt{2} - \ln\left|-1+\sqrt{2}\right|\right) \\ &= \sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Alltså får vi att längden är

$$l = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|\right) = 4+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| \approx 6.49. \tag{6}$$

Lösning (iv)

Accelerationen ges av

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (2, 2) = \boldsymbol{a}(t). \tag{7}$$

Eftersom $\boldsymbol{a}$ är konstant, och $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, är också $\boldsymbol{F}$ konstant.

Uppgift 3.7(+ ytarea)

a) Punkten $P : (0, 1, 1)$ ligger på ytan

$$\begin{cases} x = s \cos t, \\ y = s \sin t, \\ z = s^2 \end{cases} \tag{8}$$

där $s \in [0, 2], t \in [0, 2\pi]$. Bestäm en normalriktning i P till ytan.

b) Skissera ytan i a).

extra) Bestäm ytarean.

Lösning a

Tangentvektorerna $\boldsymbol{r}'_s$ och $\boldsymbol{r}'_t$ ligger i planet, så deras vektorprodukt är en normal till planet. Normalen ges alltså av

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t - 0 \\ s \cos^2 t + s \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t \\ s \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Men vad är s och t då?

- $P_z = 1 \quad \Longrightarrow \quad s = 1.$
- $P_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad t \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}.$
- $P_y = 1 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}.$

Vi stoppar in våra värden på s och t och får att normalvektorn alltså är

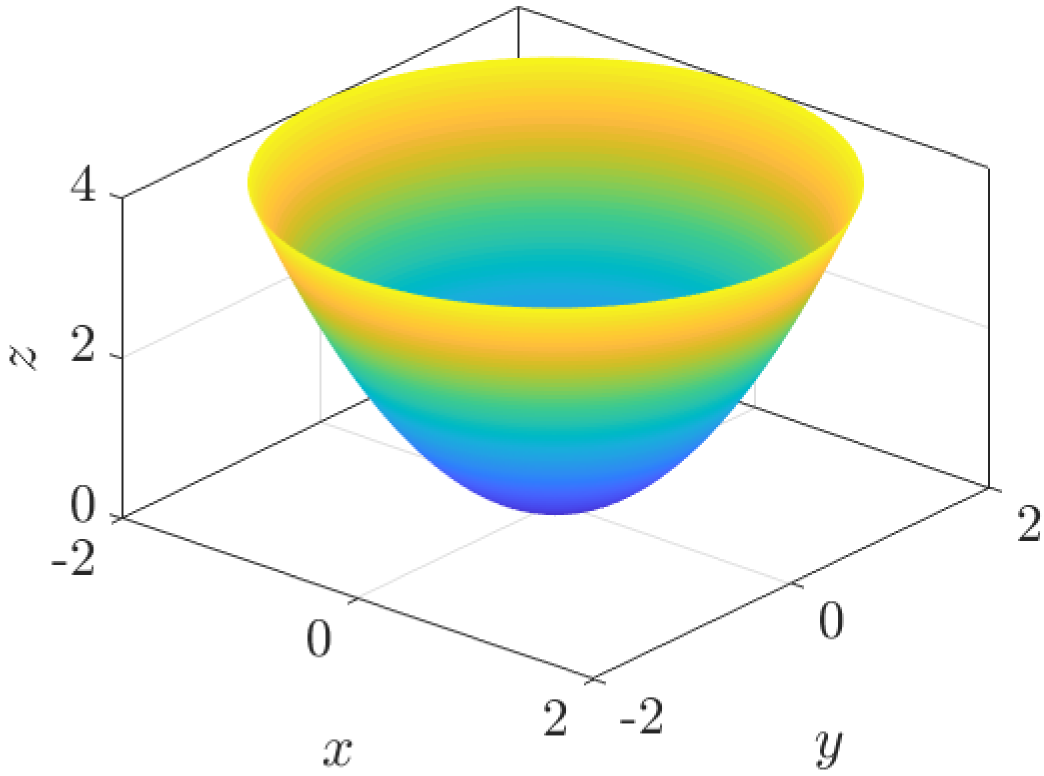
$$\boldsymbol{n} = \left(-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), 1\right) = (0, -2, 1). \tag{10}$$

Lösning b

Parametriseringen för x och y ger en cirkel i xy-planet med radie $s \leq 2$.

Parametriseringen för z gör att ju större radien är desto högre upp hamnar ytan, max $= 2^2 = 4$.

Om vi försöker skissa detta borde det alltså bli något likt Figur 1.



Figur 1: Ytan.

Lösning extra

För att beräkna ytarean kan vi integrera över alla små ytelement av ytan,

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_S |\mathrm{d}\boldsymbol{S}| = \iint\limits_S \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\left(-2s^2\cos t\right)^2 + \left(-2s^2 \sin t\right)^2 + s^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_0^2 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4s^4 + s^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = 2\pi \int\limits_0^2 s\sqrt{1+4s^2}\,\mathrm{d}s = \left\{\begin{array}{c} u = 1+4s^2, \\ \mathrm{d}u = 8s\,\mathrm{d}s, \\ u \in (1,17) \end{array}\right\} = \frac{\pi}{4}\int\limits_1^{17} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^{17} = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 1\right).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Uppgift 8.16

Låt Y vara den sfäriska kalotten

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 1. \tag{12}$$

a) Ge en parameterframställning av Y.

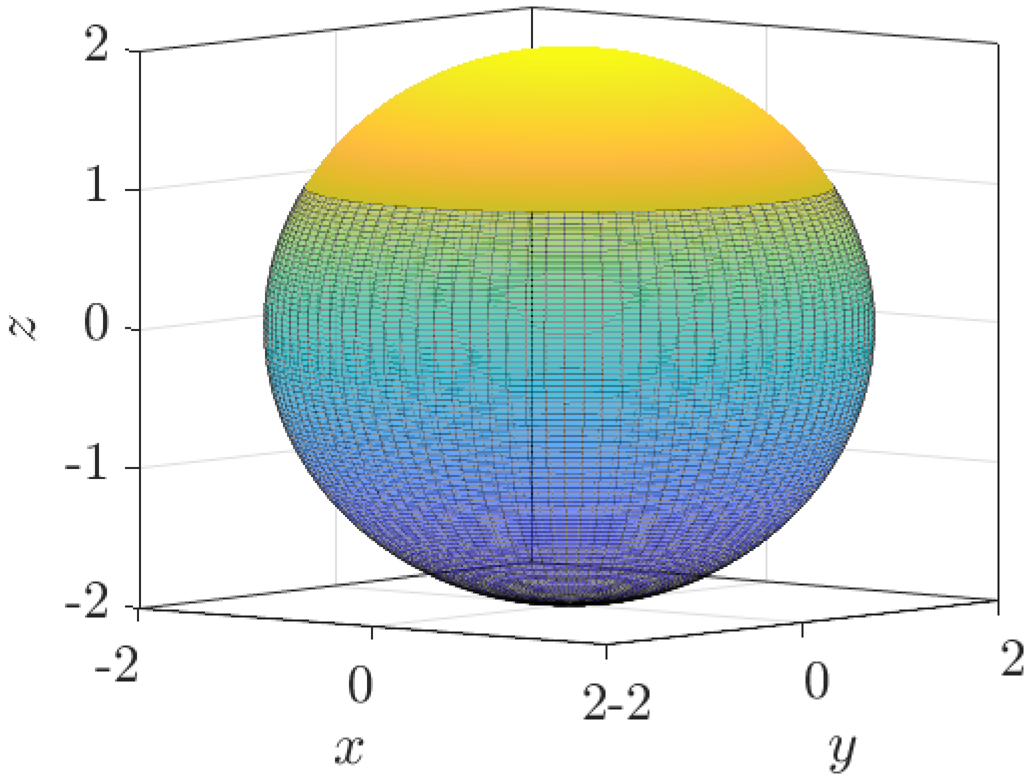
b) Bestäm en normalvektor till Y.

c) Beräkna arean av Y.

d) Beräkna arean av $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq h, \quad h \in [0, R]$.

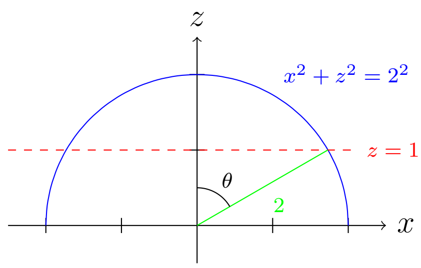
Lösning a

Ytan är ritad i Figur 2.



Figur 2: En sfär med radie 2 och ytan Y.

Ytan är symmetrisk i xy-planet, så vi kan nöja oss med att studera ytan i xz-planet. Där får vi



Vi vet redan hur att parameterframställa en sfär. Men nu har vi bara den övre delen av en sfär, så vi söker alltså vinkeln θ.

Vi ser att θ ligger i en triangel med hypotenusa 2 och närliggande katet 1. Vi kan alltså beräkna θ enligt

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}. \tag{13}$$

Ytans parameterframställning ges alltså av

$$\boldsymbol{r} = (2\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{14}$$

Lösning b

Vi kan direkt notera att en normalvektor i en punkt (x, y, z) ges av just (x, y, z), ty så är alltid fallet för en sfär (think about it!), men vi kan också beräkna det algebraiskt,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi &= \begin{pmatrix} 2\cos\theta\cos\varphi \\ 2\cos\theta\sin\varphi \\ -2\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\sin\theta\sin\varphi \\ 2\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + 4\sin^2\theta\cos\varphi \\ 4\sin^2\theta\sin\varphi - 0 \\ 4\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + 4\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi \end{pmatrix} \\ &= 2\sin\theta \begin{pmatrix} 2\sin\theta\cos\varphi \\ 2\sin\theta\sin\varphi \\ 2\cos\theta \end{pmatrix} = 2\sin\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{15}$$

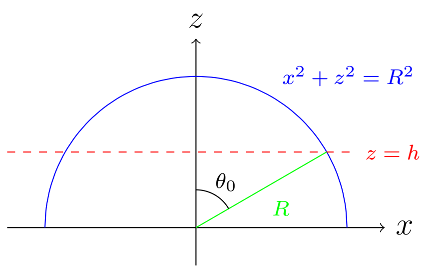
Lösning c

Arean beräknas genom att summera över alla infinitesimala ytelement,

$$\begin{aligned}A &= \int_S \mathrm{d}S = \iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} 2^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 8\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\pi\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = 4\pi.\end{aligned} \tag{16}$$

Lösning d

Vi tillämpar samma lösningsgång som tidigare. Vi börjar med att skissa för att identifiera vinkeln θ_0 från z-axeln,



Vi ser att

$$\cos\theta_0 = \frac{h}{R}. \tag{17}$$

Arean blir således

$$\begin{aligned}A &= \int_S \mathrm{d}S = \iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi R^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\theta_0} = 2\pi R^2\left(-\frac{h}{R} - (-1)\right) = 2\pi R(R - h).\end{aligned} \tag{18}$$

Uppgift 9.4

Beräkna

$$\int_\gamma y \ln \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y, \tag{19}$$

där γ är parabelbågen $y = x^2$ från punkten $(1,1)$ till $(2,4)$.

Lösning

Vi börjar med att parametrisera kurvan,

$$x = t, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \quad y = t^2, \quad \mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t, \quad t \in (1,2). \tag{20}$$

Vi kan därmed beräkna integralen enligt

$$I = \int_1^2 \left(t^2 \ln \frac{t^2}{t^2} - \frac{t}{t^2} 2t \right) \mathrm{d}t = \int_1^2 -2\,\mathrm{d}t = -2. \tag{21}$$