

Demonstration 6

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.

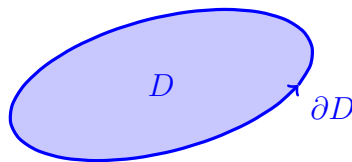
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2021

Dagens genomgång: 9.10, 9.24, 9.30, 9.39, 10.62

Greens formel

Greens formel säger att, under vissa förutsättningar, så gäller för ett område D



att

$$\oint_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy. \quad (1)$$

Eller kort i ord: Kurvintegralen till randen av en yta kan skrivas om till en dubbelintegral.

Uppgift 9.10

Beräkna

$$\int_{\gamma} y^2 \, dx + x^2 \, dy \quad (2)$$

där γ är cirkeln $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ genomlöpt ett varv moturs.

Lösning

Kurvan är en randen till ett slutet område $\implies$ vi kan använda Greens formel! Vi har alltså att

$$I = \oint_{\partial S} y^2 \, dx + x^2 \, dy = \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right) \, dx \, dy = \iint_S (2x - 2y) \, dx \, dy. \quad (3)$$

Med variabelsubstitutionen

$$\begin{aligned} x &= a + \rho \cos \theta, \\ y &= b + \rho \sin \theta, \\ dx \, dy &= \rho \, d\theta \, d\rho \end{aligned} \quad (4)$$

får vi

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^r \int_0^{2\pi} (a + \rho \cos \theta - b - \rho \sin \theta) \rho \, d\theta \, d\rho \\
 &= 2 \int_0^r \rho [\theta(a - b) + \rho(\sin \theta + \cos \theta)]_{\theta=0}^{2\pi} \, d\rho \\
 &= 2 \int_0^r \rho \cdot 2\pi(a - b) \, d\rho \\
 &= 2 \cdot 2\pi(a - b) \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^r = 2\pi r^2(a - b).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Uppgift 9.24

Beräkna arean av området mellan x -axeln och cykloidbågen

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{6}$$

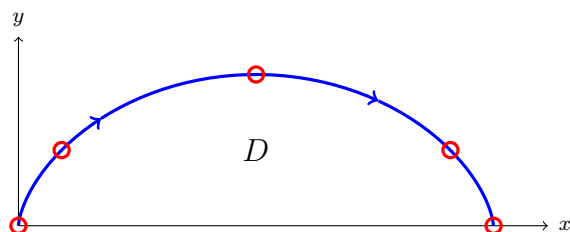
Lösning

Låt oss börja med att skissa området. För att göra det kan vi först välja ut några stickprov av x och y för olika värden på t , se Tabell 1.

Tabell 1: x - och y -värden längs kurvan.

t	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - 1$	1
π	π	2
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi + 1$	1
2π	2π	0

Om vi skissar detta får vi något likt



Arean kan beräknas enligt

$$A = \iint_D dx \, dy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} 0 \right)}_{=1} dx \, dy = \oint_{\partial D} 0 \, dx + x \, dy = \oint_{\partial D} x \, dy. \tag{7}$$

Vår kurva γ är dock inte lika med ∂D , men om vi lägger till sträckan σ längs x -axeln har vi att

$$\oint_{\partial D} x \, dy = \int_{\sigma} x \, dy - \int_{\gamma} x \, dy. \quad (8)$$

Längs x -axeln är förändringen i y noll, dvs $dy = 0$, så vi kan förenkla detta till

$$A = - \int_{\gamma} x \, dy. \quad (9)$$

Längs kurvan γ gäller att

$$\begin{aligned} x &= t - \sin t, \\ dy &= \sin t \, dt, \end{aligned} \quad (10)$$

så vi har att

$$A = - \int_{\gamma} x \, dy = - \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t \, dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{2\pi} t \sin t \, dt}_{I_2}. \quad (11)$$

Den första integralen kan beräknas enligt

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \, dt = \pi. \quad (12)$$

Den andra med partiell integration

$$I_2 = \int_0^{2\pi} t \sin t \, dt = [-t \cos t]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} -\cos t \, dt}_{=0} = -2\pi. \quad (13)$$

Arean är slutligen alltså

$$A = I_1 - I_2 = \pi - (-2\pi) = 3\pi. \quad (14)$$

Potentialfält

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ sägs vara ett **potentialfält**, eller ett **konservativt** fält, om det finns ett skalärfält U som uppfyller

$$\mathbf{F} = \nabla U. \quad (15)$$

För en kurvintegral av ett potentialfält, spelar bara start- och slutpunkterna för kurvan roll. Med andra ord, kurvintegralen är oberoende av vägen.

Uppgift 9.30

Är kraftfältet

$$\mathbf{F} = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y) \quad (16)$$

konservativt i $\mathbb{R}^2$? Bestäm i så fall en potentialfunktion U .

Lösning

Låt oss börja med att integrera F_x ,

$$U = \int F_x dx = \int x^3 - 3xy^2 dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + g(y). \quad (17)$$

Om det finns en potential U är den alltså lika med detta ovan, där $g(y)$ är någon funktion av y . Låt oss nu derivera U m.a.p. y och jämföra med F_y ,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = g'(y) - 3x^2y \stackrel{?}{=} y^3 - 3x^2y \implies g'(y) = y^3 \implies g(y) = \frac{1}{4}y^4 + C. \quad (18)$$

Det finns alltså en potential U som ges av

$$U = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + C \quad (19)$$

för godtycklig konstant C , och $\mathbf{F}$ är alltså konservativt.

Uppgift 9.39

Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \left(\sqrt{x^2 - y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - y}} \right) dx - \frac{x}{2\sqrt{x^2 - y}} dy \quad (20)$$

där γ är kurvan $x = y^2$ från $(1, -1)$ till $(4, -2)$.

Lösning

Jobbig integrand, men den ser ut att ev. ha en potential vilket skulle kunna underlätta. För att undersöka detta, låt oss först notera att

$$\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 - y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y}} \cdot (-1) \quad (21)$$

vilket ger oss att

$$U = \int -\frac{x}{2\sqrt{x^2 - y}} dy = x\sqrt{x^2 - y} + g(x). \quad (22)$$

Låt oss nu derivera U m.a.p. x så får vi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{x^2 - y} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y}} \cdot 2x + g'(x) \implies g(x) = C. \quad (23)$$

Vi har alltså att det finns en potential U som ges av

$$U = x\sqrt{x^2 - y} + C. \quad (24)$$

Alltså ges integralen av att ta potentialen i slutpunkten minus startpunkten,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= U(4, -2) - U(1, -1) = 4\sqrt{4^2 - (-2)} - 1\sqrt{1^2 - (-1)} \\ &= 4\sqrt{18} - \sqrt{2} = 12\sqrt{2} - \sqrt{2} = 11\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Uppgift 10.62

Är $\mathbf{u} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z)$ ett potentialfält? Beräkna

$$\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \quad (26)$$

längs kurvan γ given av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

Lösning

Låt oss börja med att undersöka huruvida $\mathbf{u}$ är ett potentialfält. Vi börjar med att integrera x -komponenten,

$$U = \int u_x dx = \int 2xy^2z dx = x^2y^2z + g(y, z). \quad (27)$$

Låt oss nu derivera m.a.p. y och jämföra med u_y så får vi

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2yz + g'_y(y, z) = 2x^2yz \implies g(y, z) = h(z). \quad (28)$$

Låt oss nu derivera m.a.p. z och jämföra med u_z så får vi

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2y^2 + h'(z) = x^2y^2 - 2z \implies h(z) = -z^2 + C. \quad (29)$$

Det finns alltså en potential

$$U = x^2y^2z - z^2 + C. \quad (30)$$

Alltså är det bara startpunkten $(\cos 0, \sin 0, \sin 0) = (1, 0, 0)$ och slutpunkten $(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1, 1)$ som påverkar vår kurvintegral. Den är alltså

$$\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(0, 1, 1) - U(1, 0, 0) = (-1) - 0 = -1. \quad (31)$$