Föreläsning #21 GAUSS DIVERGENS SATS

Sats 10.2.1 (Gauss)

Låt $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd Ω i rummet. Om det kompakta området K har en rand ∂K som består av en eller flera C^1-ytor och som är orienterad med utåtriktad normal så gäller att

$$\oiint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbb{F} \, dV$$

Vi ska ge beviset för reguljära områden (som måste först definieras i $\mathbb{R}^3$). Men först några exempel.

Ex. 1 Vi gör om Ex. 1 från Fö-20.

$$\mathbb{F} = (x, z, 0) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1$$

$$\Rightarrow \oiint_{\partial T} \mathbb{F} \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_T 1 \, dV$$

$$= \text{vol}(T) = 1/6, \text{ från Fö-13.}$$

Ex. 2 Låt Y vara ytan

$$Y = \{(x,y,z) \mid z = x^2 + y^2, \quad z \leq 4\}$$

och $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara fältet
$\mathbb{F}(x,y,z) = (x, y, 3)$.

Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ upp genom Y.

Lösning 1 Vi beräknar flödesintegralen $\iint_Y \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS$ direkt via en lämplig parametrisering av Y.

Fö-16: $\hat{N}\, dS = \pm \left(\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}\right) ds\, dt$

Y är en del av en funktionsyta $z = f(x,y) = x^2 + y^2$, så lämpligt att välja x & y som parametrerna och

$$\left(dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\, dx\, dy \right)$$

används ej direkt, snarare

$$\hat{N}\, dS = \pm(-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy = \pm(-2x, -2y, 1)\, dx\, dy$$

Det står att vi ska beräkna flödet upp genom Y, dvs $\hat{N}$ ska ha en positiv z-komponent $\Rightarrow$ välj $+$ tecknet ovan

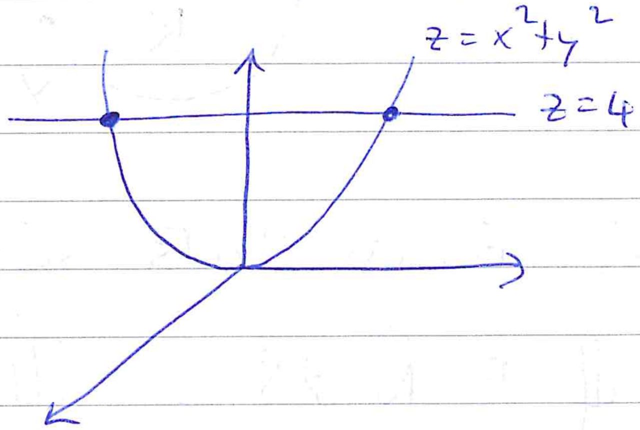
$$\hat{N}\, dS = (-2x, -2y, 1)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = (x,y,3)\cdot(-2x,-2y,1)\,dxdy$$
$$= (3-2(x^2+y^2))\,dxdy$$

$$\Rightarrow \iint_Y \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{\pi(Y)} (3-2(x^2+y^2))\,dxdy,$$

där $\pi(Y)$ är projektionen av Y ner på xy-planet, vilket är cirkelskivan

$$x^2+y^2 \leq 4$$



polära
$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3-2r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

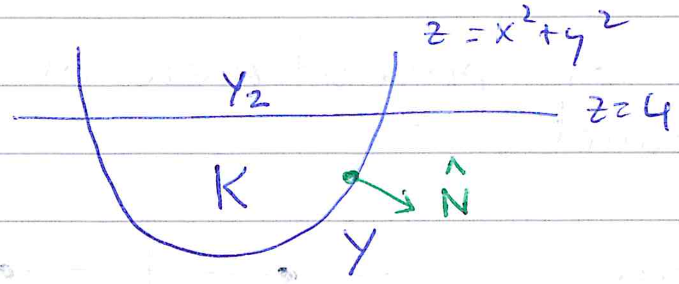
$$= 2\pi\left(3r^2/2 - 2r^4/4\right)\Big|_{r=0}^{r=2}$$

$$= 2\pi(6-8) = -4\pi.$$

<u>Lösning 2</u> Vi vill använda Gauss Sats men måste vara försiktiga av två skäl:

$\longrightarrow$

(a) Y är inte sluten. Vi får först lägga till ett "lock" Y_2 för att få en sluten yta. Locket är den del av planet $z=4$ som skärs ut av Y. $Y \cup Y_2$ tillsammans innesluter ett kompakt område K.



(b) Gauss Sats säger då att

$$\oiint_{Y\cup Y_2} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV,$$

där $\hat{N}$ pekar <u>ut</u> från K.

$$\Rightarrow \iint_Y \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV - \iint_{Y_2} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS$$

ic
ing

$\Downarrow$

Här pekar $\hat{N}$ <u>ut</u> från Y (se bild), dvs den pekar <u>ner</u>. Vi söker flödet upp, så för oss:

$$\text{flöde upp} = \iint_Y \mathbb{F}\cdot\underbrace{\hat{N}}_{\text{upp}}\,dS = \iint_{Y_2} \mathbb{F}\cdot\underbrace{\hat{N}}_{\text{ut}}\,dS - \iiint_K \nabla\cdot\mathbb{F}\,dV$$

Nu är det bara att beräkna båda termerna i HL.

<u>1:a term</u> Tanken är att denna flödesintegral blir enklare att beräkna direkt än den vi började med.

På Y_2 är $\hat{N} = (0,0,1)$

$\Rightarrow \mathbb{F} \cdot \hat{N} = (x,y,3) \cdot (0,0,1) = 3$

$dS = dx\,dy$ (Y_2 är // med xy-planet)

$\Pi(Y_2)$ är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 4$

$$\Rightarrow \iint_{Y_2} \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS = 3 \iint_{\Pi(Y_2)} 1\, dx\, dy = 3(\pi \cdot 2^2) = 12\pi$$

<u>2:a term</u> $\nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(3) = 2$

$$\Rightarrow \iiint_K \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = 2 * \mathrm{vol}(K)$$

K ges av $\{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 4,\ z \geq x^2+y^2\}$

Enklast med cylindriska koordinater

$$\mathrm{vol}(K) = \iint_{\substack{\Pi(K): \\ x^2+y^2 \leq 4}} dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{4} dz$$

$$\overset{\text{polära}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \left(2r^2 - r^4/4\right)_{r=0}^{r=2} = 2\pi(8-4) = 8\pi$$

$$\Rightarrow \iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV = 16\pi$$

$$\Rightarrow \iint_{\underset{\text{upp}}{Y}} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\, dS = 12\pi - 16\pi = -4\pi \checkmark$$

OBS! Negativt svar betyder nettoflöde ner genom Y (och därmed ut ur den delen av K).

Def: Ett kompakt och kvadrerbart område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ sägs vara reguljärt m.a.p. z (eller i "xy-led") om D kan delas upp i ändligt många delområden $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, där varje D_i har formen

$$D_i = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in E_i,\ f_i(x,y) \le z \le g_i(x,y)\}.$$

där E_i är ett kompakt & kvadrerbart område i $\mathbb{R}^2$ och $f_i(x,y)$ & $g_i(x,y)$ är C^1-funktioner av två variabler.

OBS! Note how the proof that follows is identical in approach to that of Greens sats!

På samma sätt kan man definiera reguljäritet m.a.p. x eller y.

$D \subseteq \mathbb{R}^3$ sägs vara reguljärt om det är reguljärt m.a.p. x, y och z.

Bevis av Gauss Sats för ett reguljärt område

Steg 1 Under förutsättning att D är reguljärt m.a.p. z ska vi bevisa att

$$(1) \quad \oint\!\!\!\oint_{\partial D} (0,0,F_3) \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx\,dy\,dz$$

Gör en uppdelning $D = \bigcup_{i=1} D_i$ och

betrakta först en fixt D_i. Vi ska bevisa att

$$(2) \quad \oint\!\!\!\oint_{\partial D_i} (0,0,F_3) \cdot \hat{N} \, dS = \iiint_{D_i} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx\,dy\,dz$$

$\longrightarrow$

HL Definitionen av D_i innebär att vi kan använda Fubini och integrera m.a.p. z först:

$$\iint_{\Pi(D_i)=E_i} dx\,dy \int_{z=f_i(x,y)}^{z=g_i(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz$$

$$= \underbrace{\iint_{E_i} F_3(x,y,g_i(x,y))\,dx\,dy}_{A} - \underbrace{\iint_{E_i} F_3(x,y,f_i(x,y))\,dx\,dy}_{B}$$

VL Randen ∂D_i består av 3 olika delar:

(i) "Topp-locket", som hör till funktionsytan $z = g_i(x,y)$. Här gäller

$$\hat{N}\,dS = \pm(-g_{i,x}, -g_{i,y}, 1)\,dx\,dy$$

+ tecknet om $\hat{N}$ ska peka ut (dvs upp nu) från D_i:

$$\Rightarrow \hat{N}\,dS = (-g_{i,x}, -g_{i,y}, 1)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow (0,0,F_3)\cdot\hat{N}\,dS = F_3\,dx\,dy \overset{\text{dvs}}{=} F_3(x,y,z=g_i(x,y))\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \iint_{\substack{\text{Topp av}\\ \partial D_i}} (0,0,F_3)\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{\substack{\Pi(\text{topp})\\ = E_i}} F_3(x,y,g_i(x,y))\,dx\,dy = A$$

(ii) "Botten-locket", som hör till funktionsytan $z = f_i(x,y)$. Här gäller

$$\hat{N}\,dS = -(-f_{i,x}, -f_{i,y}, 1)\,dx\,dy,$$

ty $-$ -tecknet innebär $\hat{N}$ pekar <u>ut</u> (dvs neråt nu)

$$\Rightarrow (0,0,F_3)\cdot\hat{N}\,dS = -F_3(x,y,z=f_i(x,y))\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \iint_{\substack{\text{Botten} \\ \text{av } \partial D_i}} (0,0,F_3)\cdot\hat{N}\,dS = -\iint_{\substack{\Pi(\text{botten}) \\ = E_i}} F_3(x,y,f_i(x,y))\,dx\,dy$$

$= $ B

(iii) Den del av ∂D_i som ligger mellan funktionsytorna och går runt z-axeln. Här är $\hat{N}$ parallell med xy-planet $\Rightarrow$ $\hat{N}$ har z-komp. noll $\Rightarrow (0,0,F_3)\cdot\hat{N} = 0$

$$\Rightarrow \iint_{\substack{\text{Mellandelen} \\ \text{av } \partial D_i}} (0,0,F_3)\cdot\hat{N}\,dS = 0.$$

Addition av (i), (ii), (iii) bevisar (2).

För att härleda (1) ska vi nu addera (2) över alla delområdena:

$$\sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\partial D_i} (0,0,F_3)\cdot \hat{N}\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iiint_{D_i} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

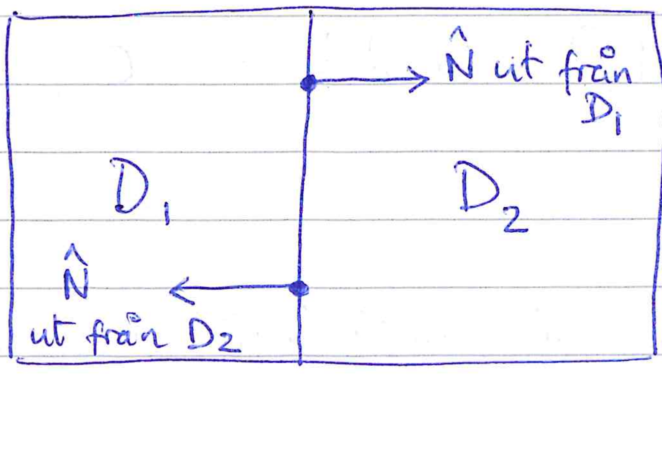
Det är klart att HL blir till

$$\iiint_{D} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$$

Återstår alltså att visa att

$$\sum_{i=1}^{n} \oint\!\!\!\oint_{\partial D_i} (0,0,F_3)\cdot \hat{N}\, dS = \oint\!\!\!\oint_{\partial D} (0,0,F_3)\cdot \hat{N}\, dS$$

Idéen är exakt samma som med Greens Sats, att flödesintegralen över inre sidor kancellerar. Denna bild borde räcka:



Steg 2 Med ett analogt resonemang kan man bevisa att om D är reguljärt m.a.p. y så gäller

(3) $$\underset{\partial D}{\oiint} (0, F_2, 0) \cdot \hat{N} \, dS = \underset{D}{\iiint} \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx \, dy \, dz$$

och om D är reguljärt m.a.p. x att

(4) $$\underset{\partial D}{\oiint} (F_1, 0, 0) \cdot \hat{N} \, dS = \underset{D}{\iiint} \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz$$

(1) + (3) + (4) $\Rightarrow$ om D är reguljärt, så gäller:

$$\underset{\partial D}{\oiint} \mathbb{F} \cdot \hat{N} \, dS = \underset{D}{\iiint} (\nabla \cdot \mathbb{F}) \, dx \, dy \, dz \quad \blacksquare$$

Fysikalisk Tillämpning: Gauss lag

Kom ihåg från FÖ-20 att det elektriska fältet som produceras av en punktladdning Q i origo ges av

$$\mathbb{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot Q \cdot \frac{1}{r^2} \hat{\mathbb{r}}$$

Låt nu K vara ett klot av radie R kring origo, så ∂K är en sfär av radie R. Det är lätt att direkt beräkna det totala flödet av $\mathbb{E}$ ut genom ∂K ty $\hat{r}$ är just enhetsnormalen utåt på sfären. Alltså:

$$\oiint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \hat{N} \, dS = \oiint_{\partial K} \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} \hat{r} \cdot \hat{r} \, dS$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} \oiint_{\partial K} dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} * \text{Area}(\partial K)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} * 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Så det totala flödet genom en sfär kring punktladdningen är
(i) oberoende av sfärens radie
(ii) upp till en konstant faktor som beror på mediet, lika med laddningens styrka.

(i) Kan tolkas som en sorts "konservationslag", men det som konserveras är "elektriskt flöde", som om det som flöder är en "incompressible" vätska. Vi återkommer till detta...
okomprimerbar (?)

(iii) Vi kan inte använda Gauss Sats direkt eftersom $\mathbb{E}$ är odefinierad i origo och därmed också $\nabla \cdot \mathbb{E}$.

Gauss lag säger dock att (i) och (ii) ska fortsätta att gälla om laddningar "smetas ut" till en kontinuerlig "laddningsdensitet":

Gauss Law for Electric Flux:

The total electric flux through a closed surface equals $1/\varepsilon$ times the net electric charge within that closed surface

Kalla den slutna ytan för ∂K och den inneslutna volymen för K.

Total electric flux through ∂K är, per definition:

$$\oiint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \underbrace{\hat{\mathbb{N}}}_{ut} \, dS$$

Net electric charge within K är, per definition.

$$\iiint_K \rho(x,y,z) \, dV,$$

där $\rho(x,y,z)$ är <u>laddningsdensiteten</u>

→

Så Gauss lag säger att

$$\oiint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \hat{N} \, dS = 1/\varepsilon \iiint_K \rho \, dV$$

$$= \iiint_K \rho/\varepsilon \, dV$$

Eftersom alla funktioner är nu kontinuerliga kan vi tillämpa Gauss Sats och härleda att

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbb{E} \, dV = \iiint_K \rho/\varepsilon \, dV$$

Om detta ska gälla för vilken som helst K så måste

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho/\varepsilon}$$

Maxwells (M1)
första ekvation

Om vi går tillbaka till punktladdningen så har vi utanför origo att

$$\mathbb{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$$

Man kan kolla att

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

och därmed av symmetriskäl att också

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

Addera $\Rightarrow$ $\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$ i hela sin definitionsmängd, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Detta är konsekvent med (M1) ty nu finns det inga laddningar alls utanför origo ($\rho \equiv 0$).

Följdaktligen, enligt Gauss Sats, så skulle nettoflödet av $\mathbb{E}$ ut genom en sluten yta Y som <u>inte</u> innesluter origo vara noll i detta fall. Alltså:

$$(*) \ldots \quad \oiint_Y \mathbb{E} \cdot \hat{N}\, dS = \begin{cases} Q/\varepsilon, & \text{om } Y \text{ innesluter } Q \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Sista Anmärkningar.

① Ett vektorfält $\mathbb{F} : D \to \mathbb{R}^3$, där $D \subseteq \mathbb{R}^3$ är en domän, sägs vara <u>källfritt</u> i D om $\nabla \cdot \mathbb{F} = 0$.

Föregående exempel illustrerar valet av terminologi. (Nollskilt nettoflöde ut genom en sluten yta Y kräver en "källa" till flödet inuti)

② Betrakta en (riktig) vätska som flöder i rummet. Låt $\mathbb{V}(x,y,z)$ vara hastigheten av vätskan som passerar punkten (x,y,z). Om hastigheten är oberoende av tid i varje punkt så säger man att man har <u>steady state flow</u>.

$\mathbb{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kallas för ett <u>hastighetsfält</u>

Vätskeflödet sägs vara <u>incompressible</u> om $\nabla \cdot \mathbb{V} = 0$.

Föregående exempel illustrerar valet av terminologi.

③ Såsom TM-studenterna kommer att se denna vecka (och F-arna längre fram i en annan kurs) så kan man även i fallet med punktladdningen (en "punktkälla") betrakta $\mathbb{E}$ och därmed $\nabla \cdot \mathbb{E}$ som s.k.

"<u>distributioner</u>" (vanliga funktioner är distributioner, men inte alltid tvärtom), och därmed skriva upp en Gauss Sats som även make:ar sense i detta fall. Det är ett exempel av Gauss Sats för <u>singulära fält</u> (dvs för vektorfält med singulariteter).

④ Maxwells andra ekvation lyder

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \quad (M2)$$

Detta motiveras fysikaliskt av att det finns inga "magnetiska monopoler" så magnetfältet är alltid källfritt.