Föreläsning #22 STOKES SATS

Definition av Positiv Orientering för Parametriserade Ytor :

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakt & kvadrerbart med positivt orienterad rand ∂D som består av en eller flera styckvis C^1-kurvor. Låt $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ vara en C^1-funktion.

$Y = \mathbf{r}(D)$ kallas för en parametriserad yta (ytstycke)

$\partial Y := \mathbf{r}(\partial D)$ kallas för randen till Y

Y sägs vara <u>positivt orienterad</u> om ∂Y ärver den positiva orienteringen av ∂D.

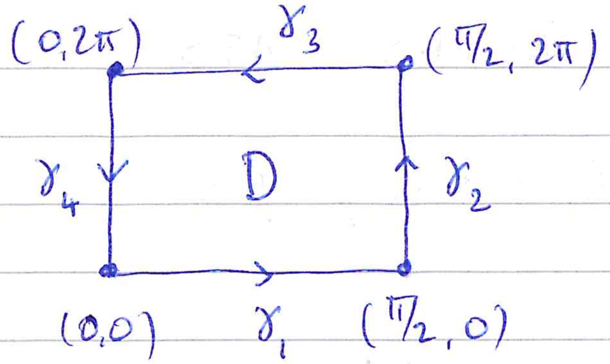
<u>Ex. 1</u> Halvsfär.

Låt $D = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$

$\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ ges av
$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$

$Y = \mathbf{r}(D)$ är övre halvan av enhetssfären.

Om vår definition stämmer borde $\partial Y = \mathbf{r}(\partial D)$ vara ekvatorn. Frågan är med vilken orientering. Låt oss kolla : $\longrightarrow$



Med positiv orientering:

$$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

$r(\gamma_1)$: Storcirkeln från $(0,0,1)$ till $(1,0,0)$

$r(\gamma_2)$: Österut kring ekvatorn - Y ligger till vänster om färdriktningen

$r(\gamma_3)$: Tillbaka från $(1,0,0)$ till $(0,0,1)$ längs storcirkeln.

$r(\gamma_4)$: Stir crazy i nordpolen.

$$\Rightarrow \quad \partial Y = r(\partial D) = \cancel{r(\gamma_1)} + r(\gamma_2) + \cancel{r(\gamma_3)} + r(\gamma_4)$$

Sammanlagt: ∂Y är ekvatorn genomlöpt österut (norra halvsfären till vänster).

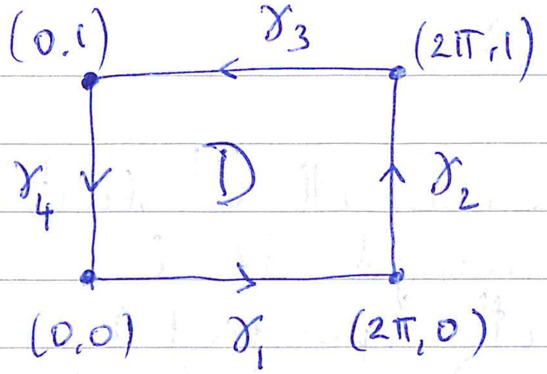
Ex. 2 Öppen Cylinder

$$D := [0, 2\pi] \times [0,1]$$

$r : D \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$r(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

$Y = r(D)$ är cylinder(skal)en av radie 1 kring z-axeln, mellan $z=0$ och $z=1$, och utan topp eller bottenplatta (dvs "öppen")



m.a.o. moturs sett uppifrån längs den positiva z-axeln

$\pi(\gamma_1)$: Österut kring bottencirkeln (Y till vänster)

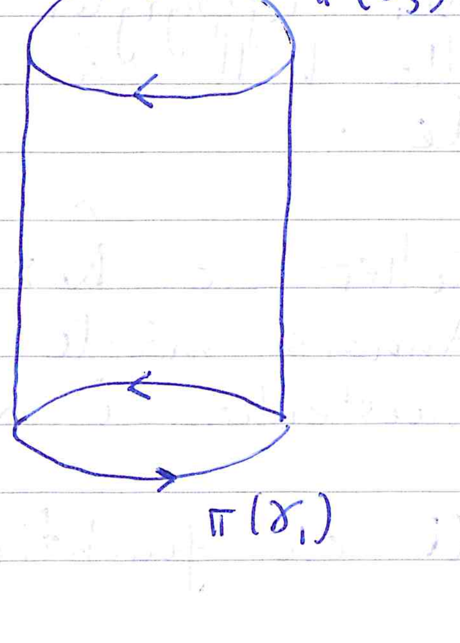
$\pi(\gamma_2)$: rakt uppåt från (1,0,0) till (1,0,1)

$\pi(\gamma_3)$: Medurs kring toppcirkeln (Y till vänster) sett uppifrån

$\pi(\gamma_4)$: rakt ner från (1,0,1) till (1,0,0)

$$\Rightarrow \quad \partial Y = \pi(\partial D) = \pi(\gamma_1) + \cancel{\pi(\gamma_2)} + \pi(\gamma_3) + \cancel{\pi(\gamma_4)}$$

Sammanlagt : ∂Y består av bottencirkeln genomlöpt moturs sett uppifrån, plus toppcirkeln genomlöpt medurs sett uppifrån.



Sats 10.3.2 (Stokes)

Låt $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1-fält definierat i en öppen mängd Ω i rummet. Om Y är ett (positivt) orienterat ytstycke i Ω med (positivt) orienterat rand ∂Y så gäller

$$\oint_{\partial Y} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N} \, dS$$

Anmärkning 1 (oviktigt)

Enligt uppgift så publicerade Stokes sin sats för första gången som en tentauppgift på Cambridge någon gång på 1800-talet

Anmärkning 2 (viktigt)

När man löser uppgifter, enklaste sättet att hålla koll på riktningar är kanske följande:

Stokes Sats gäller då $\hat{N} \times d\mathbf{r}$ pekar mot Y. Annars måste man sätta ett minustecken i satsen.

Om Y hör till en funktionsyta,

$\longrightarrow$

$Y = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$

så vet vi sedan Fö-16 att

$$\hat{N}\,dS = \pm(-f_x, -f_y, 1)\,dx\,dy$$

* För Stokes Sats: välj alltid + här.

* Mer allmänt,

$$\hat{N}\,dS = +\left(\frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t}\right) ds\,dt$$

plus tecknet gäller i Stokes Sats.

Bevis av Stokes Sats för en C^2-funktionsyta

Vi antar alltså att ytan Y är på formen

$$Y = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,\ z = f(x,y)\},$$

där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är kompakt & kvadrerbart och $f(x,y)$ är en C^2-funktion av 2 variable

Vi börjar med VL i Stokes Sats.

$$\mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz)$$

Kurvan hör till Y så $z = f(x, y)$.

Linjärisering: $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$\Rightarrow \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

Nu när vi har skrivit allt i termer av x och y så innebär det att kurvintegralen är längs $\pi_{xy}(\partial Y)$, dvs, per definition av positivt orienterad ytstycke, längs ∂D med positiv orientering. Så VL blir

$$\oint_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy$$

Vi kan tillämpa Greens Sats på detta så blir den lika med dubbelintegralen

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dx\, dy$$

Nu måste vi utveckla de partiella derivatorna

Vi måste vara försiktiga ty $\mathbb{F}$'s komponenter beror på x, y och z, och z i sin tur är en funktion av x och y ($z = f(x,y)$). Så kedjeregeln säger:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_i(x,y,z) = \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad i = 1,2,3$$

och likadant för $\partial/\partial y$.

Via kedjeregeln plus produktregeln blir integranden i dubbelintegralen följande:

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}}\right)$$

$$+ \cancel{F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}}\right) - \cancel{F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

direkt kancellation

kancellation enligt Clairaut ($f \in C^2$)

$\longrightarrow$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)$$

$$+ 1\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot (-f_x, -f_y, 1)$$

Så dubbelintegralen blir till

$$\iint_D (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy$$

$$= \iint_Y (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N}\, dS \quad \blacksquare$$

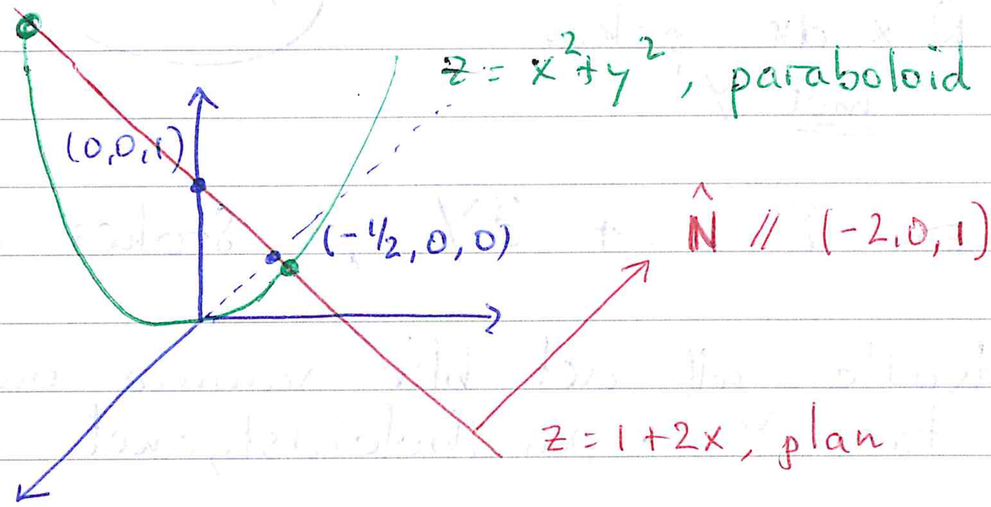
<u>Exempel 10.56</u> Låt γ beteckna skärningskurvan mellan ytan $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 1 + 2x$. Beräkna det arbete kraftfältet $\mathbb{F} = (0, x, -y)$ uträttar då γ genomlöps ett varv i positiv led kring z-axeln.

Lösning 1 Stokes Sats

Först måste man förstå ordbajset "i positiv led kring z-axeln"

Det är samma sak som att säga "moturs sett uppifrån längs z-axeln".

Frågan är om det blir +/- i Stokes?



Det är klart att skärningskurvan är en ellips: det är faktiskt en cirkel:

$$z = x^2+y^2 = 1+2x$$
$$\Rightarrow x^2-2x+y^2 = 1$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+y^2 = 2$$

, cirkel av radie $\sqrt{2}$ centrerad i $(1,0)$

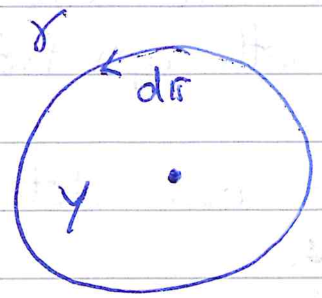
Denna cirkel är projektionen $\Pi_{xy}(\gamma)$.

γ skär ut en del av planet, samt en del av paraboloiden. Vi kan ta vilket som som Y. Frågan är om $\gamma = \pm \partial Y$?

Y = planstycket

Sett uppifrån:

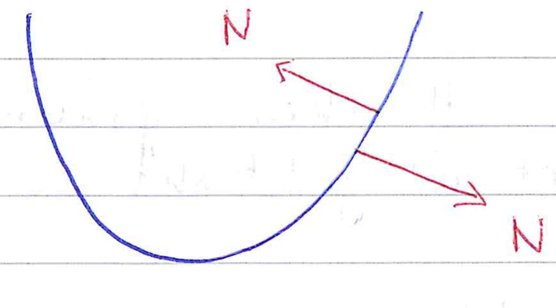
Y till vänster
$\hat{N} \times dr$ pekar **mot** Y



$\hat{N} \parallel (-2,0,1)$

$\Rightarrow \gamma = +\partial Y$, Stokes utan tecken

Kolla att det blir samma om vi i stället tar Y = paraboloidstycket



Åt vilket håll?

γ går moturs kring z-axeln sett uppifrån.
Om $\hat{N} \times dr$ ska peka **mot** paraboloiden så måste $\hat{N}$ peka **uppåt**, alltså

$\hat{N}\, dS = +(-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy \qquad f(x,y) = x^2 + y^2$

$\Downarrow$ Yes! $\gamma = +\partial Y$

Så det blir Stokes utan tecken:

$$\oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N}\, dS$$

$$\nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & x & -y \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

Sedan ska det inte spela någon roll om vi väljer Y = plan / paraboloid. Vi kollar!

(i) Y = plan.

Funktionsyta $z = f(x,y) = 1 + 2x$

$$\hat{N}\, dS = + (-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy = (-2, 0, 1)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N}\, dS = (-1,0,1) \cdot (-2,0,1)\, dx\, dy = 3\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \iint_Y (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N}\, dS = 3 \iint_{\pi(Y)} dx\, dy = 3 \times \text{Area}(\pi(Y))$$

$\pi(Y)$ är ju insidan av $\pi(\gamma)$, dvs cirkelskivan $(x-1)^2 + y^2 \leq 2$. $\Rightarrow$ Arean är $\pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$

$\Rightarrow$ Svar: 6π.

(iii) Y = paraboloid

Funktionsyta $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\hat{N}\, dS = + (-f_x, -f_y, 1)\, dx\, dy$$
$$= (-2x, -2y, 1)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N}\, dS = (-1, 0, 1) \cdot (-2x, -2y, 1)\, dx\, dy$$
$$= (2x + 1)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \iint_Y (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N}\, dS = \iint_{(x-1)^2 + y^2 \le 2} (2x+1)\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{trick}}{=} 2 \underbrace{\iint_{(x-1)^2+y^2 \le 2} (x-1)\, dx\, dy}_{0, \text{ av symmetriskäl}} + 3 \underbrace{\iint_{(x-1)^2+y^2 \le 2} dx\, dy}_{\text{som förut } = 6\pi.}$$

0, av symmetriskäl som förut $= 6\pi$.

Lösning 2 Direkt Parametrisering av γ

När man har, som i Lösning 1, insett att γ's projektion på xy-planet är cirkeln
$$(x-1)^2 + y^2 = 2,$$
och att γ ska genomlöpas moturs sett

uppifrån (därmed likväl $\pi_{xy}(\gamma)$) så har man den naturliga parametriseringen

$$x - 1 = \sqrt{2}\cos t \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}\cos t$$
$$y = \sqrt{2}\sin t$$
$$z = 1 + 2x \Rightarrow z = 3 + 2\sqrt{2}\cos t$$

$$\Rightarrow \gamma = \{ \pi(t) = (1+\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 3 + 2\sqrt{2}\cos t) \mid 0 \le t \le 2\pi \}$$

$$\pi'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, -2\sqrt{2}\sin t)$$

$$\mathbb{F}(\pi(t)) = (0, x(t), -y(t))$$
$$= (0, 1+\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\sin t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}(\pi(t)) \cdot \pi'(t) = \sqrt{2}\cos t + 2\cos^2 t + 4\sin^2 t$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma \mathbb{F} \cdot d\pi = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\cos t + 2\cos^2 t + 4\sin^2 t \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0 \quad \text{klart}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi$$

$$\Rightarrow 0 + 2\pi + 4\pi = 6\pi \quad \checkmark$$

Fysikalisk Tillämpning: Faradays och Ampères lagar.

① Faradays Law of Induction

"The induced electromotive force in any closed circuit is equal to the negative of the time rate of change of the magnetic flux enclosed by the circuit"

Alltså, i matematiska:

$$\oint_{\partial Y} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{r} = -\frac{d}{dt} \iint_Y \mathbb{B} \cdot \hat{N}\, dS$$

$\downarrow$ Stokes

Formellt: Man "deriverar under integraltecknet" (Kap 5.1)

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbb{E}) \cdot \hat{N}\, dS = \iint_Y -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \cdot \hat{N}\, dS$$

Gäller för godtycklig Y $\Rightarrow$

$$\boxed{\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}}$$

(M3) Faradays lag

② Kom ihåg Biot-Savart lagen:

$\longrightarrow$

$$\mathbb{B}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) ; & (x,y) \neq (0,0) \\ \text{odefinierat} ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Låt γ vara en cirkel kring z-axeln genomlöpt i positiv riktning, dvs moturs sett uppifrån längs z-axeln

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \mu I \quad \ldots \quad (*)$$

I är strömmen som flöder genom skivan som inneslutes av γ, och μ är en medieberoende proportionalitetskonstant.

Om vi nu tänker oss att strömmen är "utsmetad" till ett C^1-strömfält $\mathbb{J} = \mathbb{J}(x,y,z)$ så måste $(*)$ bli till

$$(**) \quad \oint_{\gamma = \partial Y} \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \mu \iint_{Y} \mathbb{J} \cdot \hat{N} \, dS$$

där Y är skivan som inneslutes av γ och $\hat{N} = (0,0,1)$ i detta fall, alltså den positivt orienterade normalen till Y

$\longrightarrow$

Tillämpa Stokes Sats till VL av (**):

$$\oint_{\partial Y} \mathbb{B} \cdot d\mathbb{r} = \iint_{Y} (\nabla \times \mathbb{B}) \cdot \hat{N} \, dS$$

Gäller för godtycklig Y $\Rightarrow$

$$\boxed{\nabla \times \mathbb{B} = \mu \mathbb{J}}$$

Ampères lag

Inte riktigt (M4), en korrigering behövs. Det ska vi prata om imorgon!