

Tavelpresentation

David Prytz Arcombe, Jonathan Carlson, Tobias Edwinson
Theodor Hansson, Elias Torstensson

February 2021

1 Implicita funktionssatsen och dubbelintegraler

1.1 Implicita funktionssatsen

Den första satsen som gicks igenom denna veckan var implicita funktionssatsen. Sats: Låt $F(\mathbf{x})$ vara en C^1 funktion av n variabler och $\mathbf{a}$ en punkt på nivåhyperytan $F(\mathbf{x}) = C$, där C är en konstant. Om $\frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \neq 0$ finns det en öppen omgivning av $\mathbf{a}$ sådan att restriktionen av nivåytan implicit definierar en C^1 funktion av $n - 1$ variabler $x_k = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. För denna funktions partiella derivator gäller $\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial x_k}$.

Exempelvis för ekvationen $e^{xyz} = z - x - y$ i omgivningen av $(0, 1, 2)$ gäller att:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= zye^{xyz} + 1 \stackrel{(0,1,2)}{=} 3, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= zxe^{xyz} + 1 \stackrel{(0,1,2)}{=} 1, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= xye^{xyz} - 1 \stackrel{(0,1,2)}{=} -1 \neq 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Då $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ samt $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, definierar F implicit en nivåyta i omgivningen av varje variabel. Om vi exempelvis sätter $z = f(x, y)$ i en omgivning av $(0, 1, 2)$ gäller då att:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = 3, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = 1.\end{aligned}$$

1.2 Dubbelintegraler

Informellt definieras $\iint_D f(x, y) dx dy$ som en tecknad volym mellan $z = f(x, y)$ och området D i (x, y) planet där D är en sluten, begränsad och sammanhängande mängd. Fyra tekniker för att beräkna dubbelintegraler är:

- Inspektion: utnyttja definitionen som en tecknad volym. Utnyttja eventuella symmetrier samt linjaritet.
- Fubinis sats: $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$.
- Variabelbyte: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv$.
- Integration med hjälp av nivåkurvor: $\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du$.

2 Variabelbyte och nivåkurvor

2.1 Axelparallella rektanglar

För Fubinis sats krävs en definition av axelparallella rektanglar, en av de enklaste flerdimensionella domänerna att integrera över i flera variabler. Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ där $a \leq b$ och $c \leq d$. Låt sedan $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ definiera en axelparallell rektangel i xy -planet. Fubinis sats säger att givet Δ och en kontinuerlig funktion f från Δ till $\mathbb{R}^2$ så gäller följande:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Dubbelintegralen av f över Δ är alltså ekvivalent med två enkelintegraler över de två variablerna var för sig, där den ena hålls fix när den andra integreras. Det spelar ingen roll i vilken ordning man integrerar över de två variablerna, men det kan ha stor betydelse för hur svåra beräkningarna blir. Slutligen är konventionen att man börjar med den inre integralen, oftast skriver man inte ut parenteserna.

Nästa sats behandlar mer allmänna domäner man kan vilja integrera över. Även här krävs först en definition, nu av reguljära områden. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd. D sägs vara reguljärt i x -led om D kan partitioneras i ändligt många många delområden $(D_1, \dots, D_n)$ där varje D_i är på formen:

$$D_i = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha_i \leq y \leq \beta_i\}$$

där α_i, β_i är C^1 -funktioner av en variabel och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x) \forall x \in [a, b]$. Reguljäritet i y -led definieras analogt med definitionen i x -led. En domän D sägs vara reguljär om den är reguljär i både x -led och y -led. Låt nu $D = \{(x, y) | a \leq$

$x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Satsen säger då att:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Detta innebär att dubbelintegralen över ett område som är reguljärt i x -led kan beräknas som sammanslagningen av enkelintegraler, där man först integrerar med avseende på y . Är området reguljärt i y -led fungerar det analogt där. Ifall området D är reguljärt kan man integrera i vilket ordning man vill, men precis som i fallet med Fubinis sats så påverkar valet av ordning hur svåra beräkningarna blir.

2.2 Variabelbyte

Låt $x = g(u, v), y = h(u, v)$ vara en bijektiv C^1 -avbildning från ett begränsat, öppet och kvadrerbart område E i uv -planet till motsvarande område D i xy -planet, där $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ i E . Då gäller följande:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv.$$

$J(u, v)$ kallas för Jacobianen, och är alltså lika med determinanten av funktionsmatrisen. Jacobianen fungerar som en skalningsfaktor som måste vara med när vårt variabelbyte skalar om rummet vi integrerar i. Samma sak hände i envariabelanalysen, då gav exempelvis variabelbytet $u = x^2$ oss $du = 2x \, dx$. I dubbelintegralfallet har vi istället $dx \, dy = |J(u, v)| \, du \, dv$.

Variabelbyte används bäst när vi integrerar över en domän som har gränser som är svåra att beskriva. Exempelvis kan ett parallelogram transformeras till en kvadrat, och en ellips kan transformeras till en cirkel. Om regionen vi integrerar över beskrivs på följande vis:

$$\begin{aligned} C_1 &\leq f(x, y) \leq C_2, \\ C_3 &\leq g(x, y) \leq C_4, \end{aligned}$$

där C_i är godtyckliga konstanter, så är substitutionen $u = f(x, y), v = g(x, y)$ mycket bra. Detta gör att vi bara behöver ha konstanterna som gränser i dubbelintegralen. Notera att man oftast kommer att behöva lösa ut x och y ur substitutionerna, då man måste skriva om integranden i termer av u och v .

2.3 Nivåkurvor

Ett sista sätt att integrera dubbelintegraler är med hjälp av nivåkurvor. Detta kan användas när vi har en dubbelintegral på följande form:

$$\iint_D h(g(x, y)) \, dx \, dy$$

där g är en $\mathcal{C}^1$ -funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}$, h är en C^0 -funktion av en variabel och D är en kompakt kvadrerbar mängd. Vi kan då använda följande omskrivning:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du,$$

$$A(u) = \text{Area}\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\}.$$

Detta är alltså ett sätt att skriva om en dubbelintegral till en (förhoppningsvis) lättare enkelintegral.

3 Gaussisk distribution och dubbelintegraler i flera variabler

3.1 Gaussisk distribution

Gauss sats säger att integralen i ekvation (2) är lika med roten ur pi, det vill säga

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (2)$$

Denna sats har tillämpning inom sannolikhetsläran. Då normalfördelningens täthetsfunktion N liknar e^{-x^2} , samt att dess integral är lika med 1

$$N(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

I detta fall är $N(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

3.1.1 Bevis av gaussisk distribution

Låt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. Då gäller att:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Sedan kan vi ersätta både x och y med polära koordinater.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r \, dr \, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r \, dr \\
&= [u = r^2, du = 2r \cdot dr] \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{2} du \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Vilket medför att $I = \sqrt{\pi}$.

3.2 Generaliserade dubbelintegraler i flera variabler

Om f är en funktion i $\mathbb{R}^n$ och $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en domän.

$$\int \dots \int_D (x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n. \quad (3)$$

Integralen i ekvation (3) sägs vara generaliserad om ett av följande fall stämmer:

- i) f är obegränsad i domänen D , eller
- ii) domänen D är obegränsad.

4 Bevis av Fubinis sats

4.1 Def 1: Partitioner

Låt $a \leq b \wedge a, b \in \mathbb{R}$. En partition av det slutna intervallet $[a, b]$ är en ändlig följd, där varje efterföljande tal är större än det föregående, enligt:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Det går att generalisera partitioner till flera variabler. Givet $a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge a \leq b \wedge c \leq d$ och partitionerna är på $[a, b]$ och $[c, d]$ får vi följande:

$$\begin{aligned}
a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\
c &= y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.
\end{aligned}$$

Vilket kan ses som en partition på den axelparallella rektangeln $\Delta = [a, b] \times [c, d]$.

4.2 Def 2: Trappfunktioner

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel. En funktion $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ kallas för en trappfunktion om ϕ är konstant på varje halvöppen rektangel $[x_i, x_{i+1}) \times [y_i, y_{j+1})$.

4.3 Def 3: Dubbelintegraler över trappfunktioner

Låt Δ vara en axelparallell rektangel: $[a, b] \times [c, d]$, och låt $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ vara en trappformad funktion med avseende på partitionerna:

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_n = d. \end{aligned}$$

Låt därefter c_{ij} vara värdet hos Φ på en delrektangel $\Delta_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Då säger vi att:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i,j} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(c_{ij}), \quad (4)$$

det vill säga att dubbelintegralen av Φ över Δ är summan av volymen av rätblocken med baserna Δ_{ij} och höjden c_{ij} .

4.4 Def 4: Integrerbarhet över axelparallella rektanglar

Låt Δ vara en axelparallell rektangel: $[a, b] \times [c, d]$, och låt $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ vara en begränsad funktion. Vi säger då att f är integrerbar över Δ om $\forall \epsilon > 0 \exists \Phi, \Psi$ som är trappfunktioner på Δ som uppfyller följande villkor:

$$\begin{aligned} (i) : & \Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \forall (x, y) \in \Delta \\ (ii) : & \iint_{\Delta} \Psi(x, y) - \Phi(x, y) \, dx \, dy \leq \epsilon, \end{aligned}$$

och då detta gäller sätter vi:

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \sup_{\Phi \leq f} \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \inf_{\Psi \geq f} \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx \, dy.$$

4.5 Huvudsatsen (Fubinis sats)

4.5.1 Sats

Låt Δ vara en axelparallell rektangel: $[a, b] \times [c, d]$, och låt $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på Δ . Då gäller:

(i) : f integrerbar på Δ

$$(ii) : \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

4.5.2 Bevis

För att bevisa (i) behöver vi, enligt definition 4, givet ett ϵ hitta trappfunktioner Φ och Ψ som uppfyller:

$$(I) : \Phi(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y) \forall (x, y) \in \Delta$$

$$(II) : \iint_{\Delta} \Psi(x, y) - \Phi(x, y) \, dx \, dy \leq \epsilon.$$

Fixera ett $\epsilon > 0$. f kontinuerlig på den kompakta mängden $\Delta \implies f$ är kontinuerligt likformig, det vill säga:

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Delta \text{ gäller } \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| < \delta \implies \\ \implies |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \frac{\epsilon}{\text{Area}(\Delta)}, \end{aligned} \quad (5)$$

eftersom $\frac{\epsilon}{\text{Area}(\Delta)}$ är lika godtyckligt som ϵ . Välj nu partitioner så att diametern av varje delrektangel $\Delta_{ij} < \delta$. Då f är kontinuerlig gäller det att f antar största och minsta värde på varje sluten delrektangel, sätt dessa värden till M_{ij} respektive m_{ij} . Sätt nu Ψ, Φ till trappfunktioner som antar värdena M_{ij} respektive m_{ij} på Δ_{ij} . Per definition har vi nu uppfyllt villkor (I).

För att visa (II) utgår vi från dubbelintegralen och utvecklar enligt ekvation (4) under definition 3:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \Psi(x, y) - \Phi(x, y) \, dx \, dy &= \\ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (M_{ij} - m_{ij}) \cdot \text{Area}(\Delta_{ij}) &< \\ < \frac{\epsilon}{\text{Area}(\Delta)} \cdot \text{Area}(\Delta) = \epsilon. \end{aligned}$$

Det vi gör i det här steget är att inse att M_{ij} och m_{ij} är funktionsvärden av f och sålunda är mindre än $\frac{\epsilon}{\text{Area}(\Delta)}$ enligt ekv. (5), eftersom vi valde diametern på varje Δ_{ij} till mindre än eller lika med δ . Summan av arean av alla delrektanglar är uppenbart samma sak som arean av hela Δ , så vi är klara med att visa (II) och därmed även (i).

Det återstår nu att visa (ii) så är vi klara med beviset. Antag att

$$\begin{aligned} \exists \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) \, dy \\ \exists \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx. \end{aligned}$$

Det är uppenbart att $\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x, y) \, dy \right) dx$ (samma sak gäller analogt för Ψ). Enligt definition 4 har vi då:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy &= \sup_{\Phi \leq f} \iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \sup_{\Phi \leq f} \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x, y) \, dy \right) dx \leq \\ &\leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx, \end{aligned}$$

samt att:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy &= \inf_{\Psi \geq f} \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx \, dy = \inf_{\Psi \geq f} \int_a^b \left(\int_c^d \Psi(x, y) \, dy \right) dx \geq \\ &\geq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx, \end{aligned}$$

och beviset är klart eftersom

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx &\leq \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \\ &\implies \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

Beviset är helt analogt om man byter plats på x och y .