

Föreläsning # 23

AVSLUTNING AV VECTORANALYS

① Kopplingen mellan virvelfrihet och konservatism i $\mathbb{R}^3$

Sats 10.5.3

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän, $F: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^1 -fält. Då gäller:

F konservativt $\Rightarrow F$ virvelfritt

Bevis Antag att F är konservativt, så $F = \nabla \phi$ för någon C^2 -funktion $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$$(F_1, F_2, F_3) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \times F = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right)$$

$$= (0, 0, 0) \text{ enligt Clairaut, ty } \phi \in C^2 \quad \square$$

förra veckans fråga blir nu denna veckans
 $\rightarrow$

fråga. För att kunna ge svaret måste vi ha en definition av "enkelt sammanhängande" som make: ar sense i $\mathbb{R}^3$. Följande definition make: ar sense i godtycklig dimension

Def En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sägs vara enkelt sammanhängande om

- (i) M är bägvisst sammanhängande
- (ii) Varje enkel & sluten kurva i M kan deformerats kontinuerligt till en punkt utan att lämna M .

Anmärkningar

(a) Detta blir ekvivalent med definitionen vi gav i $\mathbb{R}^2$. Om man har en enkel och sluten kurva i $M \subseteq \mathbb{R}^2$ så kan den kontrakteras kontinuerligt till en punkt utan att lämna M om och endast om hela insidan av kurvan hör till M . För annars finns det ett hål som måste korsas om kurvan deformerats till en punkt.

(b) För vilketa som helst klot i $\mathbb{R}^3$ (i synnerhet ett klot av radie 0, dvs en enda punkt) så är $\mathbb{R}^3 \setminus \text{klotet}$ enkelt s.h. Ty

en kurva som "går runt" klotet kan deformeras till en punkt utan att träffa klotet genom att först "lyfta upp" den ovanför klotet.

Däremot är $\mathbb{R}^3 \setminus$ linje inte enkelt s.h. Ty en kurva som går runt linjen kan ej deformeras till en punkt utan att träffa linjen.

Sats 10.5.4

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett enkelt sammanhängande domän, $F: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^1 -fält. Då gäller:

F virvelfritt $\Rightarrow F$ konservativt.

Bevis Låt F vara virvelfritt, dvs $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. För att bevisa att F är konservativt så räcker det, enligt (vårt bevis av) Sats 9.43, att visa att $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, för varje

gäller i
godtycklig
dimension

enkel & sluten kurva γ i D .

Tag en sådan kurva γ . Eftersom D är enkelt s.h. så kan γ kontinuerligt

deformeras till en punkt utan att lämna D . Låt γ vara ytan som sveps ut under deformationen. Då ligger γ helt inom D och $\gamma = \pm \partial\gamma$ per konstruktion. Stokes Sats gäller:

$$\oint_{\partial\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\gamma} (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

$$= 0, \text{ ty } \nabla \times \mathbb{F} \equiv \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \pm \oint_{\partial\gamma} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \square$$

② Nablaräkning.

kolla filen för Lv7 i Canvas med en lista av 9 olika identiter gällande nablaoperatoren $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

Det är de tre sista jag vill fokusera på:

$$(g) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F}) = 0 \quad (\text{div}(\text{curl } \mathbb{F}) = 0)$$

$$(h) \quad \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0} \quad (\text{curl}(\text{grad } \phi) = \mathbf{0})$$

$$(i) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbb{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{F}) - \nabla^2 \mathbb{F}$$

$$(\text{curl}(\text{curl } \mathbb{F}) = \text{grad}(\text{div } \mathbb{F}) - (\text{grad})^2 \mathbb{F})$$

(g), (i) förutsätter att $\mathbb{F} \in C^2$

(h) förutsätter att $\phi \in C^2$

(h) Detta är bara Sats 10.5.3. 'Nuff said!

(g) Bevis: Gäller då $F \in C^2$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times F) &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times F)_1 + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times F)_2 + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times F)_3 \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\&= \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}} \\&= 0 \quad (\text{parvis cancellation enligt Clairaut}) \quad \square\end{aligned}$$

Def: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän,
 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett vektorfält.
 F sägs vara ett rotationsfält om
det finns ett C^1 -fält $G: D \rightarrow \mathbb{R}^3$
s.a. $F = \nabla \times G$. G kallas för en vektorpotential
till F .

(h) säger: F rotationsfält $\Rightarrow F$ källfritt

Vi kan ställa en ny "veckans fråga":

F källfritt $\stackrel{??}{\Rightarrow} F$ rotationsfält?
m.a.o. F källfritt $\stackrel{??}{\Rightarrow} F$ har en vektorpotential?

Precis som med första VF

$\mathbb{F}$ irrvelfritt $\stackrel{??}{\Rightarrow}$ $\mathbb{F}$ har en skalärpotential?

så är svaret "det beror på". Vi avstår att gräva djupare här (det är mer komplicerat än med skalärpotentialer) men kan konstatera t.ex. att svaret är JA om $\mathbb{F}$ är definierat i hela $\mathbb{R}^3$.

(M2) sägen att $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ alltid.

En vektorpotential till ett magnetfält kallas för en magnetisk potential och brukar betecknas $\mathbf{A}$.

$$\text{Så } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

(i) Bevis: Båda leden är vektorfält. Vi bevisar likhet av deras första komponenter. Beviset för övriga komponenter är likadant.

$$\text{VL: } [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})]_1$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{F})_3 - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{F})_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right)$$

$$\stackrel{\text{clairaut}}{=} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right)$$

Addera och subtrahera $\partial^2 F_1 / \partial x^2$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_1$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_1$$

$$= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F})_1 - (\nabla^2 \mathbf{F})_1$$

$$= [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}]_1 \quad \square$$

→

Notation / Terminologi :

Differentialoperatoren $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

kallas för (3-dim.) Laplacianen

Betecknas på olika sätt

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$$

③ Maxwells Ekvationer

Följande har vi kommit fram till hittills :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon \quad (\text{Gauss lag})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{no magnetic monopoles})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradays lag})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (\text{Amperes lag})$$

Det visar sig att Amperes lag är ej konsekvent med de övriga tre - se Avsnitt 10.6 i boken för en ingående diskussion om detta. Det blir bra om vi korrigerar till

→

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (M4)$$

Anm: $\mu \epsilon$ brukar vara ett väldigt litet tal, vilket förklarar varför korrigeringen är svårt att upptäcka experimentellt. Men den "make:ar sense av symmetrihäl": Faradays lag säger att ett tidsvarierande magnetfält ger upphov till ett rotationellt elfält (eller vice versa). Så det vore "logiskt" att ett tidsvarierande elfält gav upphov till ett rotationellt magnetfält (eller vice versa).

Vi tar specialfallet vakuum:

Inga laddningar: $\rho = 0$
 Inga strömmar: $\mathbf{J} = 0$
 $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$
 $\epsilon = \epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Maxwells ekvationer i vakuum blir:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (M1.v)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (M2.v)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (M3.v)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t \quad (M4.v)$$

Tillämpa nu identitet (i) på $\mathbf{E}$ (eller $\mathbf{B}$)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

$\downarrow$ (M3.v)

$\downarrow$ (M1.v)

0

$$= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{Clairaut, om } \mathbf{B} \in C^2)$$

(M4.v)

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Så} \quad -\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{där } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{exakt i SI-enheter})$$

Detta är en 3-dimensionell vågekvation
Precis som i en dimension (se Fil 2-1)

kan det bevisas att lösningarna är superpositioner av vågor med fart c .

Dessa kallas för elektromagnetiska vågor.

Maxwell förmodade att ljus bestod av EM-vågor, vilket nu är den accepterade teorin (

Mest intressant dock är att farten $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ är en universell konstant.

Enligt Newtons mekanik, om två observatorer har konstant relativ hastighet så måste de uppleva exakt samma krafter ($F = mr''$ så relativ $r'' = 0$). Men då skulle två sådana observatorer uppleva exakt samma fysikaliska lagar, i synnerhet skulle de göra samma experiment och skriva upp samma Maxwells ekvationer i vakuum. Så de skulle mäta samma hastighet för ljus.

Men hur kan två observatorer som rör sig relativt varandra mäta samma hastighet? Det går inte ihop, Newtons mekanik fallerar ... välkommen till 1900-talet!

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..