Föreläsning # 24

Innan vi går vidare till optimering vill jag för fullständighetens skull ge en formell definition av vad som menas med att "kontinuerligt deformera" en kurva.

Så låt $\gamma = \{ \pi(t) \mid a \le t \le b \}$ vara en (parametriserad och orienterad) C^k-kurva i $\mathbb{R}^n$.

En <u>C^k-deformation</u> av γ är en C^k-avbildning

$$\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$$
$$(s,t) \mapsto \Gamma(s,t)$$

sådan att $\Gamma(0,t) = \pi(t) \quad \forall\, t \in [a,b]$.

För varje fixt $s \in [0,1]$ sätt

$$\gamma_s = \{ \Gamma(s,t) \mid a \le t \le b \}$$

γ_s kallas för <u>deformationen av γ vid tiden s</u> ($\gamma_0 = \gamma$ själv)

γ_1 kallas för (den slutgiltiga) deformationen av γ.

γ sägs ha deformerats kontinuerligt till punkten $x_0 \in \mathbb{R}^n$ om

$$\Gamma(1,t) = x_0 \quad \forall\ t \in [a,b].$$

OPTIMERING (Kap. 4)

4.1 : Optimering på kompakta områden
4.2 : Optimering på icke-kompakta områden
4.3 : Lagranges Multiplikator-metod.

4.1 Den allmänna uppgiften som studeras här är:

Givet : (i) En kompakt mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$
(ii) En C^1-funktion $f: D \to \mathbb{R}$

Sökes : Största och minsta värdena som f antar.

(P)

Vi kan göra ett antal allmänna konstateranden:

(a) Att D är kompakt garanterar att största och minsta värden antas. För detta ändamål hade det räckt med $f \in C^0$, men om $f \in C^1$ ... läs vidare

(b) A priori, varje punkt i D är antingen en <u>inre</u> punkt eller en <u>rand</u>punkt

$$D = D_0 \cup \partial D$$

D_0: inren till D (ENG: interior)

∂D: randen till D (ENG: boundary)

Kom ihåg definitionerna:

Låt $\varepsilon > 0$ och $x \in \mathbb{R}^n$. Den öppna bollen av radie ε kring x ges av

$$B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon \}$$

Låt nu $x \in D$.

$x \in D_0 \iff \exists\ \varepsilon > 0$ s.a. $B_\varepsilon(x) \subseteq D$

$x \in \partial D \iff \forall\ \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x)$ innehåller både punkter i D och punkter utanför D.

(c) Låt nu $f : D \to \mathbb{R}$ vara C^1. Om

f antar sitt största eller minsta värde i punkten x_0 då har vi att:

$$x_0 \in D_0 \Rightarrow x_0 \text{ är en lokal extrempunkt till } f$$

$$\overset{f \in C^1}{\Longrightarrow} x_0 \text{ är en kritisk/stationär punkt till } f, \text{ dvs } \nabla f(x_0) = 0.$$

(d) Antag att ∂D är styckvis C^1. Det innebär att vi kan göra en uppdelning

$$\partial D = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$$

där varje Y_i är en $(n-1)$-dimensionell C^1-(hyper)yta. A priori kan vi hitta, för varje Y_i, en C^1-parametrisering

$$\pi_i : E_i \longrightarrow Y_i$$

där E_i är en kompakt mängd i $\mathbb{R}^{n-1}$.

Sammansättningen $f \circ \pi_i : E_i \to \mathbb{R}$ blir då en C^1-funktion av $n-1$ variabler, definierad på den kompakta mängden E_i

Så våra tidigare observationer (a), (b), (c) gäller för $f \circ \pi_i$, $i = 1, \ldots, n$.

rekursiva

Observationen (a), (b), (c), (d) ger följande allmänna rekursiva procedur för att lösa problem (P):

Steg 1 Hitta alla kritiska punkter till f i D genom att lösa ekvationssystemet

$$\nabla f = \mathbb{0}$$

Släng eventuella lösningar $\mathbb{x}$ där $\mathbb{x} \notin D$.

Steg 2 Dela upp ∂D i ett ändligt antal C^{1}-ytstycken $Y_1, \dots, Y_n$.

För varje i, bestäm en C^1-parametrisering

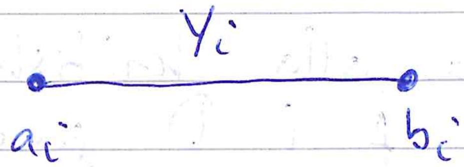
$$\pi_i : E_i \to Y_i ,$$

där $E_i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ är kompakt.

Sätt $g_i = f \circ \pi_i$ och för paret (g_i, E_i) gå till Steg 1

* Proceduren avslutas då man går till Steg 2 och randen är tom så det finns inget mer att göra. I allmänhet inträffar detta efter n iterationer.

Efter $n-1$ iterationer, den generiska situationen är att varje Y_i är en sluten intervall i $\mathbb{R}^1$



Så har befinner man sig i situationen man känner igen från envariabelanalys; för att hitta de största och minsta värdena som en C^1-funktion $\xi(t)$ av en variabel antar på en sluten intervall måste man kolla båda ändpunkterna samt alla stationära punkter ($\xi'(t) = 0$) i intervallen.

* När proceduren är klar, samlar man alla "kandidatpunkter" man har fått vid upprepad tillämpning av Steg 1 & 2.

Man beräknar f i varje kandidatpunkt och tar de största och minsta av dessa värden. Dessa <u>måste</u> vara f's största och minsta värden i D.

<u>OBS 1</u> Nästan alla våra exempel är för $n=2$, dvs funktioner $f(x,y)$ av två variabler, bara för att minska mängden

beräkningar (dvs antalet iterationer i algoritmen). Det är viktigt dock att notera att algoritmen funkar i godtycklig dimension.

OBS 2 Proceduren ger en allmän "mall" för att hitta extremvärdena till en C^1-funktion på en kompakt mängd.

Man ska dock inte stirra sig blint på mallen och värdera varje uppgift för sig. Det händer ofta att det finns en "trick" som gör att man kan ta en genväg genom proceduren, eller i bästa fall avgöra ~~de~~ ett eller båda extremvärdena "direkt", utan att tillämpa proceduren alls. De två första exemplen nedan illustrerar detta.

Ex. 1 (4.5)

Bestäm största och minsta värdena till funktionen

$$f(x,y) = 7y^2 / 2(1+2x+3y)$$

i den kompakta mängden $D = [0,1] \times [0,1]$.

Smart Lösning

$x \geq 0$ och $y \geq 0$ i hela D så det är uppenbart att $f(x,y) \geq 0$ i hela D och $f(x,y) = 0$ då $y = 0$.

Så minsta värdet är 0.

Sedan, när det gäller största värdet:

$$f(x,y) = \frac{7y^2}{2(1+2x+3y)} \overset{(x\geq 0)}{\leq} \frac{7y^2}{2(1+3y)} \overset{(y\leq 1)}{\leq} \frac{7y^2}{2(y+3y)}$$

$$= 7y/8 \overset{(y\leq 1)}{\leq} 7/8$$

Vi har likheter hela vägen då $x=0$, $y=1$.

Så största värdet är $7/8$ och antas i punkten $(0,1)$.

$\longrightarrow$

Mall Lösning

① Lös $\nabla f = 0$

$$f_x = \frac{-7y^2}{(1+2x+3y)^2} = 0 \qquad (1)$$

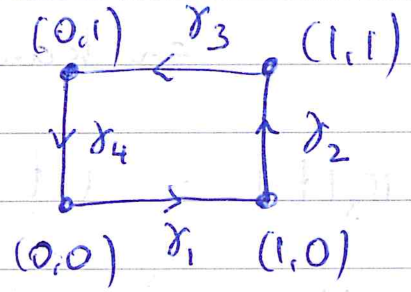
$$f_y = \text{Kvotregeln} = \ldots$$

$$= \frac{7y(2+4x+3y)}{2(1+2x+3y)^2} = 0 \qquad (2)$$

(1) & (2) $\Rightarrow$ $y = 0$

* $(x, 0)$ är en stationär punkt för varje $0 \leq x \leq 1$

② kolla randen



γ_1 : $\pi_1(t) = (t, 0) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$g_1(t) = f(\pi_1(t)) = f(t, 0) = 0$

* Dessa är samma punkter som i ①, inga nya kandidater.

γ_2 : $\pi_2(t) = (1, t) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$$g_2(t) = f(\pi_2(t)) = f(1,t) = \frac{7t^2}{6\cancel{3}(1+t)}$$

$$g_2'(t) = \frac{3(1+t)\cdot 14t - 7t^2(3)}{36\cancel{9}(1+t)^2} = \frac{42t + 21t^2}{36\cancel{9}(1+t)^2}$$

$$= \frac{21t(2+t)}{36\cancel{9}(1+t^2)}$$

$g_2'(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ $(1,0)$ ingen ny punkt

eller $t = -2$ $(1,-2) \notin D$

Ändpunkter : $(1,0)$ & $(1,1)$

$\uparrow$ redan en kandidat $*$ ny kandidat

$\gamma_3 : \pi_3(t) = (t,1) \quad 0 \leq t \leq 1$

$$g_3(t) = f(\pi_3(t)) = f(t,1) = \frac{7}{4(2+t)}$$

$$g_3'(t) = \frac{-7}{4(2+t)^2} = 0 \rightarrow \text{inga lösningar}$$

Ändpunkter : $(0,1)$ & $(1,1)$

$*$ ny kandidat $\uparrow$ redan kandidat

γ_4 : $r_4(t) = (0, t)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

$$g_4(t) = f(r_4(t)) = f(0,t) = \frac{7t^2}{2(1+3t)}$$

$$g_4'(t) = \frac{2(1+3t)\cdot 14t - 7t^2 \cdot 6}{4(1+3t)^2} = \frac{28t + 42t^2}{4(1+3t)^2}$$

$$= \frac{14t(2+3t)}{4(1+3t)^2} = 0 \Rightarrow t = 0 \quad (0,0) \text{ redan en kandidat}$$

eller $t = -2/3$ $\quad (0, -2/3) \notin D$

(3) Samla alla kandidater och beräkna f

$f(x, 0) = 0 \longrightarrow$ minsta värde
$f(1, 1) = 7/12$
$f(0, 1) = 7/8 \longrightarrow$ största värde

Ex. 2 (4.36)

Beräkna det största och minsta värdet av funktionen

$$f(x,y) = xy$$

i den elliptiska skivan $x^2 + 4y^2 \leq 8$.

$\longrightarrow$

Smart Lösning

Byt till elliptiskt polära koordinater

$$x = 2\sqrt{2}\, r \cos t \qquad 0 \le r \le 1$$
$$y = \sqrt{2}\, r \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\Rightarrow f(r,t) = xy = 4r^2 \cos t \sin t$$
$$= 2r^2 \sin 2t$$

Det är uppenbart att

Max antas då $r=1$, $\sin 2t = 1 \Rightarrow f_{max} = 2$
Min antas då $r=1$, $\sin 2t = -1 \Rightarrow f_{min} = -2$

$\sin 2t = 1 \Rightarrow 2t = \pi/2$ or $5\pi/2$
$t = \pi/4$ or $5\pi/4$

$\sin 2t = -1 \Rightarrow 2t = 3\pi/2$ or $7\pi/2$
$\Rightarrow t = 3\pi/4$ or $7\pi/4$

Max antas i punkterna $\pm(2,1)$
Min antas i punkterna $\pm(-2,1)$

OBS! En variant på denna lösning är att först konstatera att $|xy|$ kommer uppenbarligen att växa då vi rör oss bort radialt från $(0,0)$ så både f_{max} & f_{min} måste antas på randen $x^2 + 4y^2 = 8$.

Sedan är den naturliga parametriseringen av randen $\bar{r}(t) = (2\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, vilket ger

$f(t) = 4\cos t \sin t = 2\sin 2t$ ...

då blir det som ovan.

Mall Lösning

① $f_x = y = 0$ $\quad (0,0)$ Kandidat

$f_y = x = 0$

② Randen parametriseras naturligt som ovan

$$g(t) = f(\bar{r}(t)) = 2\sin 2t$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow \cos 2t = 0 \Rightarrow$$
$$2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \text{ or } \frac{7\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t = \pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4$$

$\Rightarrow$ Fyra kandidater: $(2,1), (-2,1), (-2,-1), (2,-1)$

Randen är en sluten kurva $\Rightarrow$ inga ändpunkter att beakta

③ $f(0,0) = 0$ $\quad f(2,1) = 2$ $\quad f(-2,1) = -2$

$f(-2,-1) = 2$ $\quad f(2,-1) = -2$

max

min

Ex. 3 (4.12)

Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = (x^2+3y^2)\,e^{-x^2-y^2}$$

i området $x^2+y^2 \leq 4$.

Här är det inte så uppenbart om det finns en "smart trick" så vi följer mallan.

→ Ja, det är uppenbart att $f_{min} = 0$ @ $(0,0)$ så vi följer mallen för att hitta f_{max}.

① Produktregeln ger:

$$f_x = e^{-(x^2+y^2)}\left[2x\left(1-(x^2+3y^2)\right)\right] = 0 \quad \ldots(1)$$

$$f_y = e^{-(x^2+y^2)}\left[2y\left(3-(x^2+3y^2)\right)\right] = 0 \quad \ldots(2)$$

Exponentialen kan inte bli noll så:

(1) $\Rightarrow$ $x = 0$ eller $x^2+3y^2 = 1$
(2) $\Rightarrow$ $y = 0$ eller $x^2+3y^2 = 3$

A priori fyra alternativ:

(i) $x=0,\ y=0$: $(0,0)$
(ii) $x=0,\ x^2+3y^2=3 \Rightarrow y=\pm 1$ $(0,1),\ (0,-1)$
(iii) $y=0,\ x^2+3y^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ $(1,0),\ (-1,0)$
(iv) $x^2+3y^2=1,\ x^2+3y^2=3$ omöjligt.

(2) Randen är $x^2 + y^2 = 4$

Naturlig parametrisering

$$\pi(t) = (2\cos t,\ 2\sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

MEN Nu kan vi vara lite smarta ändå och konstatera att, om $x^2 + y^2 = 4$ så blir

$$f(x,y) = (4 + 2y^2)\, e^{-4}$$

$\Rightarrow$ f_{min} på randen $= 4e^{-4}$, antas då $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
$(2,0)$, $(-2,0)$

och f_{max} på randen $= 12e^{-4}$, antas då $x = 0$, $y = \pm 2$
$(0,2)$, $(0,-2)$

(3)

$$f(2,0) = f(-2,0) = \cancel{4e^{-4}}$$
$$f(0,2) = f(0,-2) = 12e^{-4}$$
$$f(0,0) = 0 \rightarrow \text{min}$$
$$f(0,1) = f(0,-1) = 3e^{-1}$$
$$f(1,0) = f(-1,0) = \cancel{e^{-1}}$$

jämför dessa

$3/e > 12/e^4 \iff e^3 > 4$, vilket tydligen stämmer.

$\Rightarrow$ $f_{max} = 3/e$ och antas i $(0, \pm 1)$