Föreläsning # 25

4.2 Optimering på icke-kompakta områden

Om $f : D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är en C^1-funktion, och mängden D är inte kompakt så finns det ingen garanti att f antar extremvärden i D.

Således behöver man ofta först argumentera för varför extremvärden finns (eller ej) i D.

Om ett extremvärde (max och/eller min) finns så brukar det generiska argumentet för detta gå till på ett av följande två vis:

(A) D är ett obegränsat område. Man kan visa att $f(\mathbf{x}) \to 0$ om $\mathbf{x} \in D$ och $\|\mathbf{x}\| \to \infty$. Om det då finns minst en punkt $\mathbf{a} \in D$ där $f(\mathbf{a}) > 0$ (resp. $f(\mathbf{a}) < 0$) då kan man isolera en kompakt delmängd $K \subseteq D$ s.a. $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ (resp. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$) då $\mathbf{x} \in D \setminus K$. Eftersom K är kompakt måste f anta ett maximum (resp. minimum) i K, och detta måste då också vara fs max. (resp. min.) värde i hela D.

(B) D är ett begränsat, öppet område. Man kan visa att en av följande gäller:

(i) $f(x) \to 0$ då $x \to \partial D$ och
$\exists\, a \in D$ s.a. $f(a) > 0$

(ii) $f(x) \to 0$ då $x \to \partial D$ och
$\exists\, a \in D$ s.a. $f(a) < 0$

(iii) $f(x) \to +\infty$ då $x \to \partial D$

(iv) $f(x) \to -\infty$ då $x \to \partial D$

I Fall (i) och (iv) måste f anta ett största värde i D, medan att i Fall (ii) och (iii) måste ett minsta värde antas.

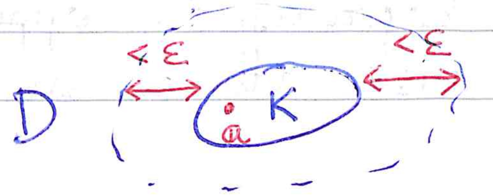
I alla 4 fall är idéen att man kan isolera en kompakt delmängd $K \subseteq D$ s.a. extremvärdet måste antas inom K

Tex. Fall (i): (övriga fallen analyseras likadant)

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ s.a. om x ligger inom avstånd ε från ∂D så är $f(x) < f(a)$

Sätt $U_\varepsilon = \{x \in D \mid \exists\, y \in \partial D \text{ med } \|x-y\| < \varepsilon\}$

Sätt $K = D \setminus U_\varepsilon$. K är kompakt ty U_ε är öppen



$\Rightarrow$ f måste anta ett största värde på K och detta måste också vara ett största värde för hela D.

<u>OBS!</u> När man har argumenterat för varför f måste ha ett max eller min i D (om den nu har det), så behöver man <u>INTE</u> ta fram en explicit kompakt delmängd $K \subseteq D$ och sedan hitta max/min på K såsom i Fö-24.

Snarare kan man tillämpa samma allmänna princip att ett extremvärde antas antingen

- i en inre punkt av D, i vilket fall det är en lokal extrempunkt av f och därmed en kritisk punkt av f
- i en randpunkt.

Så proceduren för att faktiskt hitta ett eller annat extremvärde blir som i Fö-24, fast för D själv:

(a) Lös $Df = 0$ i D

(b) Undersök randen ∂D och repetera (a) om det behövs.

OBS! Om D själv är en öppen mängd (t.ex. om D = hela $\mathbb{R}^n$, vilket ofta är fallet)

så räcker det med (a).

M.a.o. om D är öppen och man har insett att ett max eller min måste finnas, då måste värdet antas i en kritisk punkt till f. Så det räcker att lösa $\nabla f = 0$.

Terminologi Antag att $f: D \to \mathbb{R}$ antar ett maximum (resp. minimum) värde i D. Detta värde kallas för fs globala maximum (resp. minimum) i D.

* OBS att, beroende på det specifika exemplet så kan en global extrempunkt för f i D också vara en lokal extrempunkt (om punkten tillhör D_0) men behöver inte vara det (om t.ex. punkten tillhör ∂D).

Ibland reserveras termen "global" för när D är hela fs definitionsmängd, men du måste avgöra från kontexten vad som menas.

Sedan är det bara att räkna exempel ...

* Och tänk hela tiden på att det kan finnas "smarta tricks" som kortslutar "mallaktiga lösningar"

Ex. 1 (i) Motivera varför funktionen

$$f(x,y) = x + 8y + 1/xy$$

måste anta ett minsta värde i området $D = \{(x,y) \mid x>0,\ y>0\}$.

(ii) Bestäm sedan detta värde.

Lösning

(i) Det är uppenbart att $f(x,y) \to +\infty$ då $x \to +\infty$ eller $y \to +\infty$.

Notera att D är en öppen mängd och att ∂D = (positiva x-axeln) $\cup$ (positiva y-axeln)

Det är också uppenbart att $f(x,y) \to +\infty$ då $(x,y) \to \partial D$, dvs då $x \to 0$ eller $y \to 0$.

Således måste ett minsta värde finnas och det i en kritisk punkt till f.

(ii) Räcker att kontrollera kritiska punkter till f inom D.

$$f_x = 1 - 1/yx^2 = 0 \Rightarrow yx^2 = 1 \quad \ldots (1)$$
$$f_y = 8 - 1/xy^2 = 0 \Rightarrow xy^2 = 1/8 \quad \ldots (2)$$

$(1) \Rightarrow y = 1/x^2$

$(2) \Rightarrow 1/8 = x(1/x^2)^2 \Rightarrow x^3 = 8$
$\Rightarrow x = 2$
$\Rightarrow y = 1/4$

Min värdet måste vara $f(2, 1/4) = 6$.

Ex. 2 (4.19)

(i) Motivera varför

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{-x-y}$$

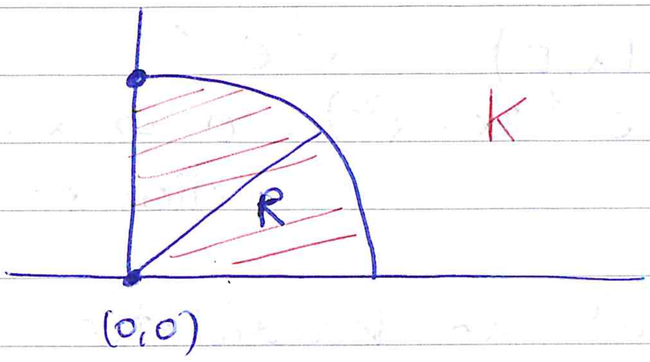
måste anta både ett största och minsta värde i $D = \{(x,y) \mid 0 \le x < \infty,\ 0 \le y < \infty\}$.

(ii) Bestäm dessa värden.

Lösning (i) Till att börja med är det helt uppenbart att minsta värdet är 0 ty $f(0,0) = 0$ ($(0,0) \in D$) och $f(x,y) \geq 0$ för alla $(x,y) \in D$.

När det gäller största värdet är det klart att, pga både negativ x & y i exponentialen, att $f(x,y) \to 0$ då $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$.

Således måste det finnas ett kompakt delområde $K \subseteq D$ på formen nedan



så att fs max-värde i K (vilket finns ty K kompakt) är också dess max-värde i hela D.

(ii) <u>Steg 1</u> Bestäm alla kritiska punkter till f i $D_0 = \{(x,y) \mid x>0,\ y>0\}$

$$f_x = e^{-x-y}\left((x^2+y)(-1)+2x\right) = e^{-x-y}(2x-x^2-y)$$
$$f_y = e^{-x-y}\left((x^2+y)(-1)+1\right) = e^{-x-y}(1-y-x^2)$$

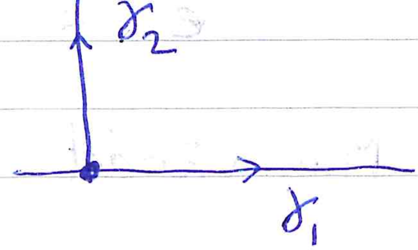
$$f_x = f_y = 0 \Rightarrow 2x-x^2-y = 1-y-x^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 1-\cancel{x^2} = 2x-\cancel{x^2} \Rightarrow x = 1/2 \Rightarrow y = 3/4$$

* $(1/2, 3/4)$ är en kandidat

<u>Steg 2</u> Undersök ∂D

$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$, där



$\gamma_1 = \{ (x,0) \mid 0 \le x < \infty \}$
$\gamma_2 = \{ (0,y) \mid 0 \le y < \infty \}$

$\underline{\underline{\gamma_1}}$ $\quad g(x) := f(x,0) = x^2 e^{-x}$
$g'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (0,0)$
$\rightarrow$ eller $x = 2 \quad (2,0)$

$*$ $(0,0)$ & $(2,0)$ är kandidater

$\underline{\underline{\gamma_2}}$ $\quad h(y) := f(0,y) = y e^{-y}$
$h'(y) = e^{-y}(1-y) = 0 \Rightarrow y = 1 \quad (0,1)$

$*$ $(0,1)$ är en kandidat

$\partial(\partial D) = \{(0,0)\}$, redan betraktat

<u>Steg 3</u> Jämför kandidaterna

$f(1/2, 3/4) = \cancel{e^{-5/4}}$ $(*)$
$f(0,0) = 0 \longrightarrow$ klart min
$f(2,0) = 4e^{-2}$
$f(0,1) = \cancel{e^{-1}}$ $(**)$

klart: $e^{-1} > e^{-5/4}$ $(*)$

$e^{-1} < 4e^{-2} \iff e < 4$ ✓ $(**)$

Max. värdet $= 4e^{-2}$, antas vid $(2,0)$.

Ex. 3 (4.22)

Låt $f(x,y) = (x^2+xy+y^2)e^{-x-2y}$.

Har f något största värde och/eller minsta värde

- i hela $\mathbb{R}^2$?
- i den slutna första kvadranten ?

Lösning

(a) Det är (ganska) uppenbart att f inte har ett största ~~eller minsta~~ värde i hela $\mathbb{R}^2$, ty exponentialen går mot $+\infty$ för lämpligt valda x,y.

T.ex. $f(x,0) = x^2 e^{-x} \to +\infty$ då $x \to -\infty$

(b) Jag påstår att 0 är fs minsta värde i hela $\mathbb{R}^2$. Klart att $f(0,0)=0$ så det räcker att visa att $f(x,y) \geq 0$ för alla x,y. Exponentialen är alltid positiv så måste visa att $x^2+xy+y^2 \geq 0$ för alla x,y.
Men här har vi en kvadratisk form:

$Q(x,y) = x^2+xy+y^2$ $\quad A=1,\ B=1/2,\ C=1$
$\quad AC-B^2 = 3/4 > 0,\ A>0$

$\Rightarrow$ Q är positiv definit

$\Rightarrow$ $Q(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, v.s.v.

(c) Med samma sorts resonemang som i Ex. 2 kan man visa att f måste anta ett största värde i den slutna första kvadranten, dvs $\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

Man kan hitta fs största värde i första kvadranten med samma sorts uträkning som i Ex. 2. Detta lämnas åt den intresserade läsaren.