Föreläsning # 26 LAGRANGES METOD (4.3)

Sats 4.3.1 (2 variabler, 1 bivillkor)

I en inre punkt $(a.b)$ i D_f och i D_g som löser problemet att maximera eller minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$ gäller att

$$\nabla f(a.b) \parallel \nabla g(a.b)$$

Konvention I formuleringen ovan gäller att varje vektor i $\mathbb{R}^n$ ($n=2$ i detta fall) sägs vara parallell med nollvektorn.

Bevis Om $\nabla g(a.b) = (0.0)$ finns det inget att bevisa. Så antag att $g_y(a.b) \neq 0$ (det är samma sorts resonemang i fall $g_x(a.b) \neq 0$):

Enligt Implicita Funktionssatsen finns det en omgivning U av $(a.b)$ s.a. ekvationen $g(x,y) = 0$ implicit definierar en C^1-funktion $y = \xi(x)$ i omgivningen.

Sätt $F(x) = f(x, \xi(x))$. F är definierad i en omgivning av $x=a$ och eftersom f har ett extremvärde i $(a.b)$

under bivillkoret så måste F ha en lokal extrempunkt i $x = a$.

$f \in C^1 \Rightarrow F \in C^1 \Rightarrow F'(a) = 0$

Enligt kedjeregeln,

$$F'(x) = f_x + f_y \cdot \xi'(x)$$

$$\overset{\text{IFS}}{=} f_x + f_y \left(-g_x/g_y\right)$$

$$= \left(f_x g_y - f_y g_x\right)/g_y$$

Alltså $F'(a) = 0 \Leftrightarrow f_x g_y - f_y g_x \Big|_{(a,b)} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d(f,g)}{d(x,y)}\Bigg|_{(a,b)} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\nabla f(a,b)$ och $\nabla g(a,b)$ är linjärt beroende vektorer

$\Leftrightarrow$ $\nabla f(a,b) \parallel \nabla g(a,b)$ ▨

Satsen ger en allmän procedur för att lösa problemet:

GIVET: $f(x,y)$, bivillkor $g(x,y) = 0$
SÖKES: Max/min $f(x,y)$

Proceduren kan formuleras på 2 olika sätt, varav den andra är mer vanligt förekommande i litteraturen. Båda går under rubriken <u>Lagranges Multiplikatormetod</u> (för 2 variabler och 1 bivillkor).

<u>1:a Formulering</u>

Lös ekvationssystemet

$$g(x,y) = 0$$
$$f_x g_y - f_y g_x = 0$$

Två ekvationer för två obekanta x, y så a priori lösbart.

<u>2:a Formulering</u>

<u>Alt 1</u> $g = g_x = g_y = 0$

Tre ekvationer i två obekanta x, y. Alt 1 brukar ge inga lösningar men måste ändå kontrolleras.

<u>Alt 2</u> $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$, vilket leder till följande ekvationsystem

$g = 0$; $f_x = \lambda g_x$; $f_y = \lambda g_y$ $\longrightarrow$

Tre ekvationer i tre obekanta x, y, λ så i princip lösbart.

Notera att man är ointresserad av λ egentligen, det är bara ett hjälpmedel.

λ kallas för <u>Lagrange multiplikatorn</u>, vilket ger proceduren dess namn.

<u>Ex. 1</u> (4.25)

Bestäm största och minsta avståndet från ellipsen $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$ till origo. Rita med härledning härav ut ellipsens axlar och skissera ellipsen.

<u>Lösning</u> Notera att, även om det inte är uppenbart, så är det <u>givet</u> att definitionsmängden är en ellips och därmed en kompakt mängd i $\mathbb{R}^2$. Därför vet vi a priori att uppgiften har en lösning ty "avstånd från origo" är en kontinuerlig funktion $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Att maximera/minimera $\sqrt{x^2+y^2}$ är ekvivalent med att minimera/maximera x^2+y^2. Vi tar detta som vår $f(x,y)$ för att underlätta algebran.

Så vi vill hitta max/min av

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

under bivillkoret $g(x,y) = 0$, där

$$g(x,y) = 13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72.$$

Lagrange, 2a formulering

Alt 1

$$g = 0 \Rightarrow 13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72 \quad (1)$$
$$g_x = 0 \Rightarrow 26x + 10y = 0 \quad (2)$$
$$g_y = 0 \Rightarrow 26y + 10x = 0 \quad (3)$$

(2) & (3) $\Rightarrow x = y = 0$, men (0,0) uppfyller ej (1). Inga lösningskandidater här.

Alt 2

$$f_x = \lambda g_x \Rightarrow 2x = \lambda(26x + 10y) \ldots (4)$$

$$f_y = \lambda g_y \Rightarrow 2y = \lambda(26y + 10x) \ldots (5)$$

$$g = 0 \Rightarrow 13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72 \ldots (6)$$

Först tar vi (4) & (5). Det finns två alternativ:

Fall 1: $\lambda = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} x = 0$ & $\overset{(5)}{\Rightarrow} y = 0$
(0,0) uppfyller ej (6).

Fall 2 $\lambda \neq 0$ så λ kan elimineras:

$$\lambda = \frac{2x}{26x + 10y} = \frac{2y}{26y + 10x}$$

$$\Rightarrow 52xy + 20x^2 = 52xy + 20y^2$$
$$\Rightarrow x = \pm y$$

Två nya fall, insättning in i (6):

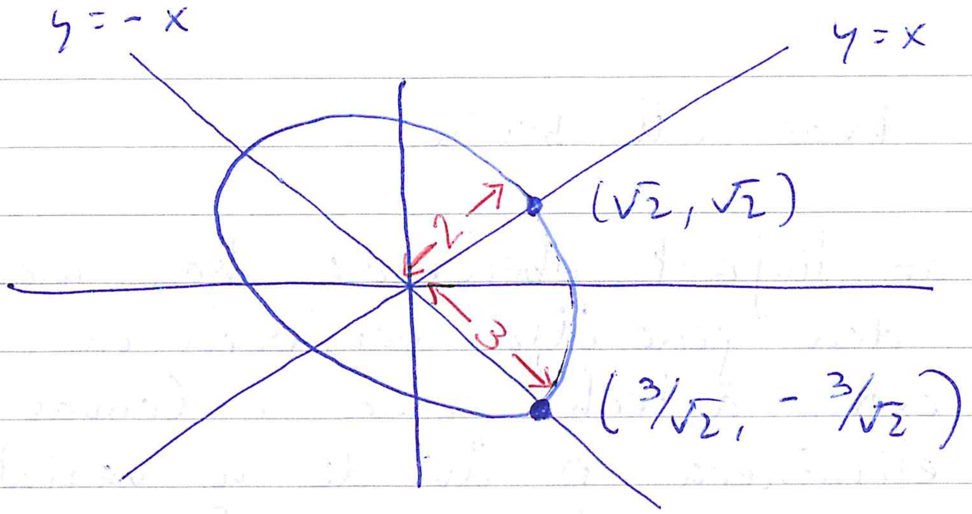
Fall (i) $x = y \overset{(6)}{\Rightarrow} 36x^2 = 72$
$\Rightarrow x = y = \pm\sqrt{2}$
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ kandidater

Fall (ii) $x = -y \overset{(6)}{\Longrightarrow} 16x^2 = 72 \Rightarrow x = \pm 3/\sqrt{2}$
$(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$, $(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$ kandidater

Nu kollar vi våra kandidater:

$f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 4 \rightarrow$ min avstånd $= 2$
$f(\pm 3/\sqrt{2}, \mp 3/\sqrt{2}) = 9 \rightarrow$ max avstånd $= 3$

Skiss Notera att punkterna som ger minst (resp. max) avstånd ligger på motsatta sidor av origo längs linjen $y = x$ (resp. $y = -x$). Ellipsen måste alltså vara centrerad i $(0,0)$ och ha dessa två linjer som sina axlar.



Lagranges Metod kan generaliseras till ett godtyckligt antal (n) variabler och ett godtyckligt antal (p) bivillkor så länge $p < n$.

<u>Sats 4.3.2</u> (n variabler, p bivillkor)

Antag att $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ är en inre punkt i D_f och i alla D_{g_k} som löser problemet att maximera eller minimera funktionen $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ under bivillkoren $g_1(\mathbf{x}) = \ldots = g_p(\mathbf{x}) = 0$. Då gäller att

$$\nabla f(\mathbf{a}), \nabla g_1(\mathbf{a}), \ldots, \nabla g_p(\mathbf{a})$$

är linjärt beroende vektorer i $\mathbb{R}^n$.

<u>Bevisidé</u> Om $\nabla g_1(\mathbf{a}), \ldots, \nabla g_p(\mathbf{a})$ är redan linjärt beroende finns

det inget kvar att bevisa.

Om de är linjärt oberoende kan man använda den generella versionen av IFS (se de extra anteckningarna i Canvas för Lv2) för att eliminera p av de n variablerna i en omgivning av $\mathbb{x} = \mathbb{a}$. För argumentets skull säg att man kan eliminera $x_{n-p+1}, \dots, x_n$, dvs att i en omgivning av $\mathbb{x} = \mathbb{a}$ medför bivillkoren att

$$x_{n-p+1} = \xi_1(x_1, \dots, x_{n-p})$$
$$\vdots$$
$$x_n = \xi_p(x_1, \dots, x_{n-p})$$

där $\xi_1, \dots, \xi_p$ är C^1-funktioner av $n-p$ variabler. Sätt då

$$F(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_n)$$
$$= f(x_1, \dots, x_{n-p}, \xi_1(x_1, \dots, x_{n-p}), \dots, \xi_p(x_1, \dots, x_{n-p})).$$

Man kan sedan använda kedjeregeln för att visa att, om f maximeras/minimeras i $\mathbb{x} = \mathbb{a}$ så är $\nabla F(a_1, \dots, a_p) = 0$ och att detta i sin tur innebär att

$$(*) \quad \nabla f(\mathbb{a}) \in \operatorname{Span}\{\nabla g_1(\mathbb{a}), \dots, \nabla g_p(\mathbb{a})\} \quad \blacksquare$$

Generaliseringen av Lagranges Metod, 2a Formulering, till godtyckliga n, p blir då följande:

<u>Alt 1</u> $g_1(\mathbf{a}) = \dots = g_p(\mathbf{a}) = 0$ och $\nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_p(\mathbf{a})$ lin. beroende

Detta överbestämda system brukar ha inga lösningar

<u>Alt 2</u> $\nabla g_1(\mathbf{a}), \dots, \nabla g_p(\mathbf{a})$ är linjärt oberoende men (*) gäller. Dvs det finns skalärer $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ s.a.

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{a})$$

Detta leder till följande ekvationsystem med $n+p$ ekvationer i $n+p$ obekanta $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p$. Som förut är man ointresserad av de λ_i egentligen, de är bara hjälpmedel.

$$\boxed{\begin{aligned} g_i(x_1, \dots, x_n) &= 0 \qquad i = 1, \dots, p \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \qquad i = 1, \dots, n \end{aligned}}$$

Allmänna Lagranges Metod.

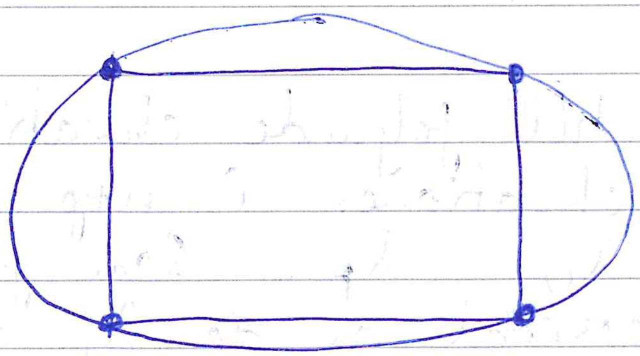
Ex. 2 (4.29) (3 variabler; 1 bivillkor)

En parallellopiped med kanterna parallella med koordinataxlarna är inskriven i ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Vilken är den största volymen parallellopiden antar?

Lösning: Notera att, rent visuellt, det är klart att det finns en största möjlig volym (och att minsta möjlig volym = 0)



Låt $2x, 2y, 2z$ vara parallellopipedens sidlängder $\Rightarrow$ dess volym är $8xyz$.

Vi vill maximera $f(x,y,z) = 8xyz$, under bivillkoret $g(x,y,z) = 0$ där

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Alt 1 $\nabla g = (g_x, g_y, g_z) = \mathbf{0}$

(En enda vektor utgör en linjärt beroende mängd $\Leftrightarrow$ den är nollvektorn)

Så: $g = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots (1)$

$$g_x = 0 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} = 0 \quad \ldots (2)$$

$$g_y = 0 \Rightarrow \frac{2y}{b^2} = 0 \quad \ldots (3)$$

$$g_z = 0 \Rightarrow \frac{2z}{c^2} = 0 \quad \ldots (4)$$

(2), (3), (4) $\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$ vilket ej uppfyller (1). $\times$

Alt 2

$$f_x = \lambda g_x \Rightarrow 8yz = \lambda\left(\frac{2x}{a^2}\right) \quad \ldots (5)$$

$$f_y = \lambda g_y \Rightarrow 8xz = \lambda\left(\frac{2y}{b^2}\right) \quad \ldots (6)$$

$$f_z = \lambda g_z \Rightarrow 8xy = \lambda\left(\frac{2z}{c^2}\right) \quad \ldots (7)$$

$$g = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots (8)$$

Fall 1 $\lambda = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} yz = 0 \Rightarrow 8\cancel{x}yz = 0$, volym noll, min ej max.

Fall 2 $\lambda \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} (5) \text{ ggr } x: \quad & 8xyz = \lambda\left(\frac{2x^2}{a^2}\right) \\ (6) \text{ ggr } y: \quad & 8xyz = \lambda\left(\frac{2y^2}{b^2}\right) \\ (7) \text{ ggr } z: \quad & 8xyz = \lambda\left(\frac{2z^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{alla lika}$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

$$\overset{(8)}{\Rightarrow} \text{ alla} = 1/3$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \text{Max volym} = 8xyz = \frac{8}{3\sqrt{3}}\,abc.$$

Ex. 3 (3 variabler, 2 bivillkor)

Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y,z) = xy + 2z$ på (...) som är skärningen mellan (...) $x+y+z=0$ och (...) $x^2+y^2+z^2=24$.

Fyll i de korrekta orden först.

Lösning

Orden är: cirkeln, planet, sfären.

Notera att eftersom definitionsmängden är en cirkel, därmed en kompakt mängd, och f är uppenbarligen kontinuerlig, så måste max/min finnas.

Vi kör Lagranges Metod. Bivillkoren är $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$ där

$g_1(x,y,z) = x+y+z$, $g_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-24$.

Alt 1 $\nabla g_1, \nabla g_2$ linjärt beroende

$\nabla g_1 = (1,1,1)$ $\nabla g_2 = (2x, 2y, 2z)$

Linjärt beroende $\Rightarrow x = y = z$

$g_1 = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ $(0,0,0)$

Men då är $g_2 \neq 0$. Inga lösningar här

Alt 2

$f_x = \lambda_1 g_{1,x} + \lambda_2 g_{2,x} \Rightarrow y = \lambda_1 + 2x\lambda_2$ ... (1)

$f_y = \lambda_1 g_{1,y} + \lambda_2 g_{2,y} \Rightarrow x = \lambda_1 + 2y\lambda_2$ ... (2)

$f_z = \lambda_1 g_{1,z} + \lambda_2 g_{2,z} \Rightarrow 2 = \lambda_1 + 2z\lambda_2$ ... (3)

$g_1 = 0 \Rightarrow x+y+z=0 \quad \ldots (4)$
$g_2 = 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 24 \quad \ldots (5)$

Tag (1) − (2) : $y - x = 2\lambda_2(x-y)$
$\Rightarrow (x-y)(2\lambda_2+1) = 0$
$\Rightarrow x = y$ eller $\lambda_2 = -1/2$.

Fall 1 $\quad x = y$

(4) $\Rightarrow z = -2x$
(5) $\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2$

Kandidater: $(2,2,-4)$ och $(-2,-2,4)$

Fall 2 $\quad \lambda_2 = -1/2$

(3) $\Rightarrow 2 = \lambda_1 - z \Rightarrow \lambda_1 = 2+z$
(1) $\Rightarrow y = (2+z) + 2x(-1/2) = 2+z-x$

(4) $\Rightarrow \cancel{x} + (2+z-\cancel{x}) + z = 0 \Rightarrow z = -1$

$y = 1-x$

(5) $\Rightarrow x^2 + (1-x)^2 + (-1)^2 = 24$
$\Rightarrow \ldots \Rightarrow x^2 - x - 11 = 0$
$\Rightarrow x = 1/2 (1 \pm \sqrt{45})$

Kandidater: $\left(\frac{1+\sqrt{45}}{2}, \frac{1-\sqrt{45}}{2}, -1\right)$ och $\left(\frac{1-\sqrt{45}}{2}, \frac{1+\sqrt{45}}{2}, -1\right)$

Jämför alla kandidaterna:

$f(2,2,-4) = -4$
$f(-2,-2,4) = 12 \longrightarrow$ max

$f\left(\frac{1+\sqrt{45}}{2}, \frac{1-\sqrt{45}}{2}, -1\right)$

min

$= f\left(\frac{1-\sqrt{45}}{2}, \frac{1+\sqrt{45}}{2}, -1\right) = \frac{1}{4}(1-45)-2 = -13$

SISTA ANMÄRKNING:

När en uppgift är formulerad som "Hitta max/min f givet bivillkor..." så finns det alltid a priori alternativ till Lagranges Metod

Eliminationslösning:

Idéen bakom Lagranges Metod är att använda IFS för att försäkra sig att bivillkoren kan utnyttjas för att eliminera variabler, utan att behöva göra det explicit! Metoden är därför lämpligt om eliminationen skulle kräva för krånglig algebra. Men a priori kan man alltid försöka eliminera variabler: givet p bivillkor i n variabler

$$g_1(x_1, .., x_n) = \dots = g_p(x_1, ..., x_n) = 0$$

skulle man eliminera p variabler och således skriva $f(x_1, .., x_n)$ som en funktion av de resterande $n-p$ variablerna, vars max / min man sedan hittar med samma metoderna som i avsnitt (4.1) och (4.2).

Smarta Lösningar

Som alltid när det gäller optimeringsproblem ska man alltid vara öppen för att hitta en "smart trick" som kortslutar mallartade lösningsprocedurer.

Vi illustrerar principerna genom att göra om Ex. 1 och Ex. 3 ovan.

Ex. 1 (Smart Lösning)

Vi kan ta reda direkt på vilken ellips det handlar om genom att byta variabler i den kvadratiska formen

$$Q(x,y) = 13x^2 + 10xy + 13y^2$$

Vi konstaterar nämligen att, eftersom koefficienterna av x^2 och y^2 är samma så kommer "krysstermen" att försvinna om vi byter variabler till

$$\left.\begin{array}{l} u = x+y \\ v = x-y \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

$$\Rightarrow 13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$$

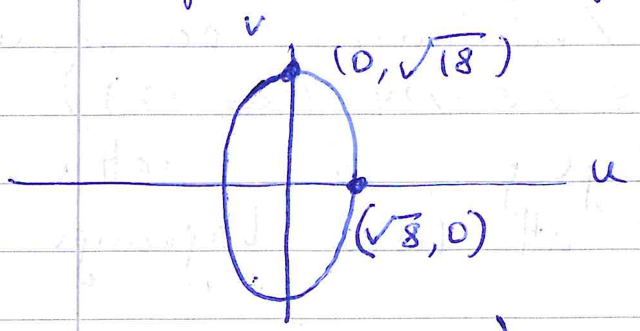
$$\Leftrightarrow \frac{13}{4}(u+v)^2 + \frac{13}{4}(u-v)^2 + \frac{5}{2}(u+v)(u-v) = 72$$

$$\Leftrightarrow u^2\left(\tfrac{13}{4} + \tfrac{13}{4} + \tfrac{5}{2}\right) + v^2\left(\tfrac{13}{4} + \tfrac{13}{4} - \tfrac{5}{2}\right) + uv\left(\tfrac{13}{2} - \tfrac{13}{2} + 0\right) = 72$$

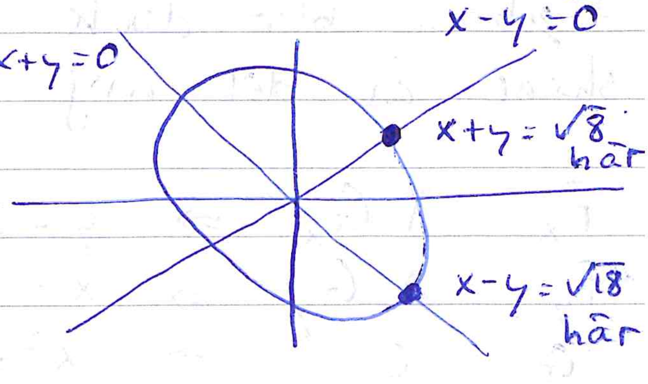
$$\Leftrightarrow 9u^2 + 4v^2 = 72$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{18} = 1,$$

vilket är ekvationen för en axelparallell ellips i (u,v)-planet



I termer av x & y:



Ex. 3 (Eliminationslösning)

$g_1 = 0 \Rightarrow x + y + z = 0 \quad \ldots (1)$

$g_2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 24 \quad \ldots (2)$

$(1) \Rightarrow z = -x - y$

$\Rightarrow f(x,y,z) = F(x,y) = xy - 2(x+y)$

och $g_2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 24$

$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + xy = 12$

Här har vi redan reducerat till 2 variabler och 1 bivillkor:

Max/Min $F(x,y) = xy - 2(x+y)$

Bivillkor $G(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 12 = 0 \quad \ldots (3)$

Man skulle kunna eliminera y från (3) – det kan betraktas som en kvadratisk ekvation för y – så att man får en funktion $\mathcal{F}(x)$ av endast en variabel, som man sedan maximerar / minimerar på vanligt vis i intervallet $-\sqrt{24} \leq x \leq \sqrt{24}$ ($\Leftarrow$ (2)). Algebran blir dock krånglig, så i detta skede är det nog bäst att köra Lagrange:

$F_x = \lambda G_x \Rightarrow y - 2 = \lambda(2x + y) \quad \ldots (4)$

$F_y = \lambda G_y \Rightarrow x - 2 = \lambda(2y + x) \quad \ldots (5)$

$G = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy = 12 \quad \ldots (6)$

(4) & (5) ger två fall :

Fall 1 $\quad \lambda = 0$

(4) $\Rightarrow y = 2$, (5) $\Rightarrow x = 2$
(6) är uppfyllt $\quad (2,2)$ en kandidat

Fall 2 $\quad \lambda \neq 0$, eliminera λ

$$\lambda = \frac{y-2}{2x+y} = \frac{x-2}{2y+x}$$

$$\Rightarrow 2y^2 + \cancel{xy} - 4y - 2x = 2x^2 + \cancel{xy} - 4x - 2y$$
$$\Rightarrow 2y^2 - 2y = 2x^2 - 2x$$
$$\Rightarrow y^2 - y = x^2 - x$$
$$\Rightarrow (x^2 - y^2) - (x - y) = 0$$
$$\Rightarrow (x-y)(x+y-1) = 0$$

Fall 2.1 $\quad x = y$

(6) $\Rightarrow 3x^2 = 12$, $x = \pm 2$

Fall 1 täcker redan $\leftarrow (2,2) \quad (-2,-2)$ kandidater

Fall 2.2 $\quad x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$

(6) $\Rightarrow x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 12$
$\Rightarrow x^2 - x - 11 = 0$
$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{45}}{2}$, $\xrightarrow[y = 1-x]{}$

$\left(\frac{1+\sqrt{45}}{2}, \frac{1-\sqrt{45}}{2}\right)$

och $\left(\frac{1-\sqrt{45}}{2}, \frac{1+\sqrt{45}}{2}\right)$ kandidater.

Jämför alla kandidater: $F(x,y) = xy - 2(x+y)$

$F(2,2) = -4$

$F(-2,-2) = 12 \rightarrow$ max

min

$\uparrow$

$F\left(\frac{1+\sqrt{45}}{2}, \frac{1-\sqrt{45}}{2}\right) = F\left(\frac{1-\sqrt{45}}{2}, \frac{1+\sqrt{45}}{2}\right) = -13$

<u>OBS!</u> När det gäller Ex. 2 skulle man kunna byta variabler till $u = x/a$, $v = y/b$, $w = z/c$

$f(x,y,z) = 8xyz = (8abc)(uvw)$

$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = u^2 + v^2 + w^2 - 1$

a, b, c är givna konstanter så nu vill man maximera $8uvw$ under bivillkoret $u^2+v^2+w^2=1$.

M.a.o. man vill maximera volymen av en axel // parallellopiped som är inskriven i en sfär. "Intuitionen" säger att, "av symmetriskäl" borde max antas då $u = v = w$ (dvs då vi har en kub). Ju, ..., men jag tycker att detta kräver ett <u>bevis</u> så man får köra Lagrange ändå.