MVE035/600 Exercise session 8

Tuesday, 9 March 2021 15:06

4.6: Hitta maximum och minimum av

$$f(x,y) = 4x^2y^2 - 2xy^4 - 3x^2$$

över $D = [0,2]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Lösn.

Inre punkter: $\nabla f = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 8xy^2 - 2y^4 - 6x = 0 \\ 8x^2y - 8xy^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y^4}{8y^2-6} = \dfrac{y^4}{4y^2-3}, \quad y \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cancel{8}\left(\dfrac{y^4}{4y^2-3}\right)^2 y - \cancel{8}\cdot\dfrac{y^4}{4y^2-3}\cdot y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y^7\cdot\left(\frac{y^2}{(4y^2-3)^2} - \frac{1}{4y^2-3}\right) = 0$$

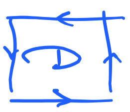
$$\Rightarrow \quad y^7\left(y^2 - (4y^2-3)\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3y^7(1-y^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = \pm 1.$$

$$x = 0, \quad x = 1$$

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = 4\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot1^4 - 3\cdot1^2 = -1.$$

Randpunkter: $\partial D = (\overbrace{[0,2]\times\{0\}}^{y=0}) \cup (\overbrace{[0,2]\times\{2\}}^{y=2}) \cup (\underbrace{\{0\}\times[0,2]}_{x=0}) \cup (\underbrace{\{2\}\times[0,2]}_{x=2})$



$$f|_{\partial D} = \begin{cases} 0, & x=0 \\ -3x^2, & y=0 \quad (\max = 0 \quad \min = -12) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 16y^2 - 4y^4 - 12, & x = 2 \quad (1)\ (\underline{max = 4}, min = -12) \\ 16x^2 - 32x - 3x^2, & y = 2 \quad (2)\ (max = 0, \underline{min = -\frac{256}{13}}) \end{cases}$$

1) $p_1(y) = -4(y^4 - 4y^2 + 3)$

$p_1'(y) = -4(4y^3 - 8y) = -16y(y^2 - 2) \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow y = 0 \vee y = \pm\sqrt{2}$

$p_1(0) = -12, \quad p_1(\sqrt{2}) = -4(4 - 8 + 3)$

$= (-4)(-1) = 4$

2) $p_2(x) = 13x^2 - 32x = x(13x - 32)$

$p_2'(x) = 26x - 32 = 2(13x - 16) \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow x = \frac{16}{13}$

$p_2\left(\frac{16}{13}\right) = \frac{16}{13}(16 - 32) = -\frac{16^2}{13} = \frac{-256}{13} < -12$

Rand: $p_2(0) = 0, \quad p_2(2) = 52 - 64 = -12$

Svar: $\min_{x \in D} f(x) = -\frac{256}{13}, \quad \max_{x \in D} f(x) = 4.$

Extra: $f(x,y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$

Visa att f antar ett största + minsta värde på $\mathbb{R}^2$ och bestäm dem.

Lösn. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och

$\lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = 0$, så f är begränsad!

Alltså, $\exists$ min + max av f!

Stationära punkter:

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \frac{(1 + x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0 \\ 2y \cdot x \end{cases}$$

$$2 - \frac{\quad}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1+y^2-x^2=0 \\ 2yx = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y\sqrt{1+y^2} = 0 \Rightarrow \underline{y=0}, \quad 1-x^2=0 \Rightarrow \underline{x=\pm 1}$$

$$f(\pm 1, 0) = \frac{\pm 1}{1+(\pm 1)^2+0^2} = \underline{\pm \frac{1}{2}}.$$

Fråga: Varför är detta max/min ?!

PAUS till 16:12 !!

4.32: Finn maximum av $f(x,y,z) = x+y+z$

över $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 2 \wedge x^2+y^2 = z\}$.

Lösn: $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2$, $g_2(x,y,z) = x^2+y^2-z$.

Mål: Maximera f, givet att $g_1 = g_2 = 0$.

Extrema pkter uppnås när $\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2$ är linjärt beroende.

$$0 \overset{?}{=} \det(\nabla f\ \nabla g_1\ \nabla g_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 1 & 2y & 2y \\ 1 & 2z & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2x & 2x \\ 0 & 2(y-x) & 2(y-x) \\ 0 & 2(z-x) & -(1+2x) \end{vmatrix} = 2(y-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2(z-x) & -(1+2x) \end{vmatrix}$$

$$= -2(y-x)\left(1+2x+2(z-x)\right)$$

$$= 2(x-y)(1+2z)$$

$$\Rightarrow x=y \ \vee\ z=-\frac{1}{2}$$

$\underline{x=y}$: $\begin{cases} 0 = g_1(x,x,z) = 2x^2+z^2-2 \\ 0 = g_2(x,x,z) = 2x^2-z \rightsquigarrow z = 2x^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 4x^4 = 2, \quad x^4 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = \pm \frac{3}{4}$$

$$x^2 = (\pm)\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = y = (\pm)\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = 1$$

vill maximera f

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

$$= \sqrt{2} + 1.$$

Återstår att kolla fallet $z = -\frac{1}{2}$ ...

Lös $\begin{cases} g_1(x, y, -\frac{1}{2}) = 0 \\ g_2(x, y, -\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$