Demonstration T

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2021

Tenta 2017-03: Uppgift 1

Låt $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}, xy \neq 0$.

a) Bestäm alla kritiska punkter till f och deras karaktär.

b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f i punkten $(2,-1)$.

Lösning a)

I en kritisk punkt gäller det att $\nabla f = \mathbf{0}$. Alltså har vi att

$$f'_x = 2x - \frac{2}{x^2 y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 y = 1, \tag{1a}$$

$$f'_y = 2y - \frac{2}{xy^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad xy^3 = 1. \tag{1b}$$

Eftersom båda ovanstående är lika med 1 kan vi sätta dem lika, så får vi

$$x^3 y = xy^3 \quad \overset{xy \neq 0}{\Longrightarrow} \quad x^2 = y^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm x. \tag{2}$$

Låt oss nu använda detta i Ekvation (1a) så får vi

$$x^3 y = \pm x^4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^4 = \pm 1 \quad \overset{(x,y)\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \quad x^4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y &= x \\ x &\in \{-1, 1\} \end{cases} \tag{3}$$

vilket alltså ger oss två kritiska punkter, $(1,1)$ och $(-1,-1)$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi andraderivatorna,

$$f''_{xx} = 2 + \frac{4}{x^3 y} = 2 + \frac{4}{(\pm 1)^3 \cdot (\pm 1)} = 6, \tag{4a}$$

$$f''_{xy} = \frac{2}{x^2 y^2} = \frac{2}{(\pm 1)^2 \cdot (\pm 1)^2} = 2, \tag{4b}$$

$$f''_{yy} = 2 + \frac{4}{xy^3} = 2 + \frac{4}{(\pm 1)^3 \cdot (\pm 1)} = 6. \tag{4c}$$

För båda de kritiska punkterna gäller alltså att

- $f''_{xx} = 6 > 0$ och
- $f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 36 - 4 > 0$

vilket innebär att båda är lokala minima.

Lösning b)

Ett Taylorpolynom av andra ordningen ges av

$$P(h,k) = f(a,b) + hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2 f''_{xx}(a,b) + 2hkf''_{xy}(a,b) + k^2 f''_{yy}(a,b)\right). \tag{5}$$

Vi har redan funnit derivatorna, så låt oss sätta in punkten i dem och funktionen,

$$f(2,-1) = 2^2 + (-1)^2 + \frac{2}{2\cdot(-1)} = 4 + 1 - 1 = 4, \tag{6a}$$

$$f'_x(2,-1) = 2\cdot 2 - \frac{2}{2^2\cdot(-1)} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \tag{6b}$$

$$f'_y(2,-1) = 2\cdot(-1) - \frac{2}{2\cdot(-1)^2} = -2 - 1 = -3, \tag{6c}$$

$$f''_{xx}(2,-1) = 2 + \frac{4}{2^3\cdot(-1)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \tag{6d}$$

$$f''_{xy}(2,-1) = \frac{2}{2^2\cdot(-1)^2} = \frac{1}{2}, \tag{6e}$$

$$f''_{yy}(2,-1) = 2 + \frac{4}{2\cdot(-1)^3} = 2 - 2 = 0. \tag{6f}$$

Så, Taylorpolynomet är alltså

$$P(h,k) = 4 + \frac{9}{2}h - 3k + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}h^2 + hk\right). \tag{7}$$

Tenta 2017-03: Uppgift 2

Låt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^3$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 2$ i punkten $(1,3,2)$.

b) Motivera varför $F(x,y,z) = 2$ definierar implicit en funktion $z = f(x,y)$ i en omgivning av punkten $(1,3)$ och bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1,3)$ och i riktning mot punkten $(2,5)$.

c) Bestäm de största och minsta värdena hos F längs skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $x - 2z = 3$.

Lösning a)

Gradienten utgör en normal till tangentplanet. Gradienten är

$$\nabla F = \left(2x, 2y, -3z^2\right)\Big|_{(1,3,2)} = (2,6,-12). \tag{8}$$

En normal $\boldsymbol{n}$ till ett plan plus en punkt P på planet är allt vi behöver för att bestämma det, och det ges av

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P},\\
(2,6,-12)\cdot(x,y,z) &= (2,6,-12)\cdot(1,3,2),\\
2x + 6y - 12z &= 2 + 18 - 24,\\
2x + 6y - 12z &= -4,\\
x + 3y - 6z &= -2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Lösning b)

Derivatan m.a.p. z är nollskild i punkten, dvs. $F'_z(1,3,2) = -12 \neq 0$, så z definieras implicit av x och y i en omgivning av den punkten enligt Implicita funktionssatsen. Vi har vidare att

$$\nabla f = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z}\right) = \left(-\frac{2}{(-12)}, -\frac{6}{(-12)}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right). \tag{10}$$

Riktningen mot punkten $(2,5)$ från $(1,3)$ ges av $\boldsymbol{u} = (2,5) - (1,3) = (1,2)$. Riktningsderivatan dit ges då av

$$\nabla f \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{6} + 1\right) = \frac{7}{6\sqrt{5}}. \tag{11}$$

Lösning c)

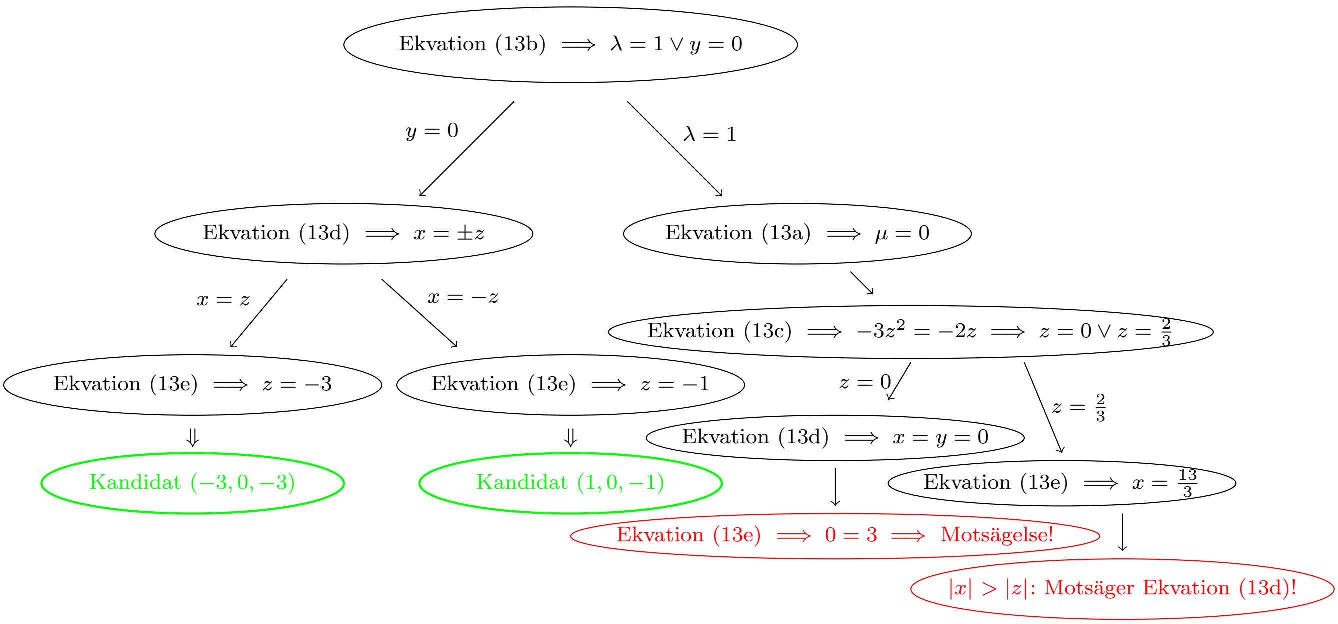
Vi söker max/min av $F(x,y,z)$ under bivillkoren $g_1 = g_2 = 0$ där

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{och} \quad g_2(x,y,z) = x - 2z - 3. \tag{12}$$

Vi kan använda Lagranges metod och vi får då de 5 ekvationerna:

$$\begin{aligned}
F'_x = \lambda g'_{1,x} + \mu g'_{2,x} \quad &\Longrightarrow \quad 2x = \lambda \cdot (2x) + \mu \cdot 1, && \text{(13a)}\\
F'_y = \lambda g'_{1,y} + \mu g'_{2,y} \quad &\Longrightarrow \quad 2y = \lambda \cdot (2y) + \mu \cdot 0, && \text{(13b)}\\
F'_z = \lambda g'_{1,z} + \mu g'_{2,z} \quad &\Longrightarrow \quad -3z^2 = \lambda \cdot (-2z) + \mu \cdot (-2), && \text{(13c)}\\
g_1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2, && \text{(13d)}\\
g_2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x - 2z = 3. && \text{(13e)}
\end{aligned}$$

Låt oss strukturera upp lösningsgången för dessa ekvationer,



De enda kandidaterna är alltså $(-3,0,-3)$ och $(1,0,-1)$. Där är $F(-3,0,-3) = 36$ och $F(1,0,-1) = 2$, vilka alltså måste vara max- och min-värdena.

Tenta 2017-03: Uppgift 3

Beräkna

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{14}$$

där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1\}$.

Lösning

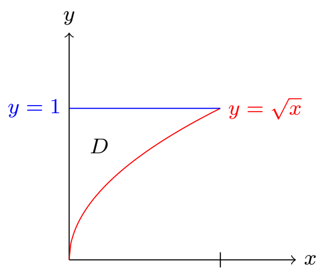
Vi skulle kunna ställa upp integralen som

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \mathrm{e}^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

men sjuttsan vilken jobbig integrand vi behöver integrera då!

Finns det något bättre sätt?

Låt oss skissa området,



så ser vi att vi också kan beskriva området som $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y^2, 0 \le y \le 1\}$. Om vi skriver ut integralen för dessa gränser får vi

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \mathrm{e}^{y^3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{y^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(\mathrm{e} - 1). \tag{16}$$

Tenta 2017-03: Uppgift 4

Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara ytan som ges av

$$Y = \left\{ \boldsymbol{r}(s,t) = \left(s + \frac{t^3}{3} - 1, s - \frac{t^3}{3} - 1, st^2 \right) : 0 \le s \le 2, 0 \le t \le 3 \right\}. \tag{17}$$

a) Bestäm en funktion $f(s,t)$ så att arean av Y är

$$A = \int_0^3 \int_0^2 f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

(OBS! Du behöver ej beräkna ytarean.)

b) Låt γ vara den orienterade kurvan $\{\boldsymbol{r}(1,t) : 0 \le t \le 3\}$. Bestäm längden av γ.

c) Bestäm

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{19}$$

där $\boldsymbol{F} = (\mathrm{e}^{yz} - \pi y^2 \sin(\pi x)\,, xz\mathrm{e}^{yz} + 2y\cos(\pi x)\,, xy\mathrm{e}^{yz} + 2z)$.

Lösning a)

Arean av ytan ges av

$$A = \int_Y \mathrm{d}S = \int_Y |\mathrm{d}\boldsymbol{S}| = \iint_Y |\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t|\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{20}$$

så funktionen vi söker ges alltså av högerledets integrand, så låt oss beräkna denna integrand!

Vi har

$$\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \\ 2st \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2st - (-t^4) \\ t^4 - 2st \\ -t^2 - t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 + 2st \\ t^4 - 2st \\ -2t^2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

så alltså ges funktionen $f(s,t) = |\boldsymbol{r}'_s \times \boldsymbol{r}'_t|$ vi söker av

$$\begin{aligned} f(s,t) &= \sqrt{(t^4 + 2st)^2 + (t^4 - 2st)^2 + (-2t^2)^2} \\ &= \sqrt{t^8 + 2 \cdot t^4 \cdot 2st + (2st)^2 + t^8 - 2 \cdot t^4 \cdot 2st + (-2st)^2 + 4t^4} \\ &= \sqrt{2t^8 + 4t^4 + 8s^2t^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Lösning b)

Kurvan ges av parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(1,t) = \left(\frac{t^3}{3}, -\frac{t^3}{3}, t^2\right) \tag{23}$$

och således dess derivata av

$$\boldsymbol{r}'(1,t) = \left(t^2, -t^2, 2t\right). \tag{24}$$

Längden av kurvan ges av

$$l = \int_\gamma |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \int_0^3 |\boldsymbol{r}'(1,t)|\ \mathrm{d}t = \int_0^3 \sqrt{t^4 + t^4 + 4t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^3 t\sqrt{2t^2 + 4}\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

Vi inför variabelsubstitutionen $u = 2t^2 + 4, \mathrm{d}u = 4t\,\mathrm{d}t$ och får

$$l = \frac{1}{4}\int_4^{22} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_4^{22} = \frac{1}{6}\left(22^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{1}{6}\left(22\sqrt{22} - 4\sqrt{4}\right) = \frac{1}{3}\left(11\sqrt{22} - 4\right). \tag{26}$$

Lösning c)

Hmm... det är flera snarlika termer i de olika komponenterna av $\boldsymbol{F}$... kan det vara så att $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält? Låt oss undersöka!

Om $\boldsymbol{F}$ är ett potentialfält ska integralen m.a.p. resp. variabel för resp. komponent av $\boldsymbol{F}$ ge oss dess potential U. Låt oss prova börja med att integrera x-komponenten m.a.p. x,

$$U = \int F_x\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{yz} + y^2\cos(\pi x) + g(y,z). \tag{27}$$

Sedan deriverar vi m.a.p. y och sätter lika med y-komponenten,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = xz\mathrm{e}^{yz} + 2y\cos(\pi x) + g'_y(y,z) = xz\mathrm{e}^{yz} + 2y\cos(\pi x) \tag{28}$$

vilket ger oss att

$$g'_y(y,z) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad g(y,z) = h(z). \tag{29}$$

Låt oss nu derivera U m.a.p. z och sätta lika med z-komponenten,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = xy\mathrm{e}^{yz} + h'(z) = xy\mathrm{e}^{yz} + 2z \tag{30}$$

vilket ger oss att

$$h'(z) = 2z \qquad \Longrightarrow \qquad h(z) = z^2 + C. \tag{31}$$

Alltså har vi att potentialen ges av

$$U = x\mathrm{e}^{yz} + y^2\cos(\pi x) + z^2 + C. \tag{32}$$

I och med att $\boldsymbol{F}$ alltså är ett potentialfält, räcker det med att kolla potentialens värde i kurvans start- och slutpunkter. För startpunkten får vi $\boldsymbol{r}(1,0) = (0,0,0)$ och för slutpunkten får vi $\boldsymbol{r}(1,3) = (9,-9,9)$. Kurvintegralen ges alltså av

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = U(9,-9,9) - U(0,0,0) = 9\mathrm{e}^{-81} + 81\cos(9\pi) + 9^2 = 9\mathrm{e}^{-81}. \tag{33}$$

Tenta 2017-03: Uppgift 5

Låt $K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1+\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{25-x^2-y^2}\right\}$.

a) Skissa området K.

b) Bestäm flödet ut ur K av vektorfältet $\boldsymbol{F} = (yz+xz, x^2+yz, z^2+y)$

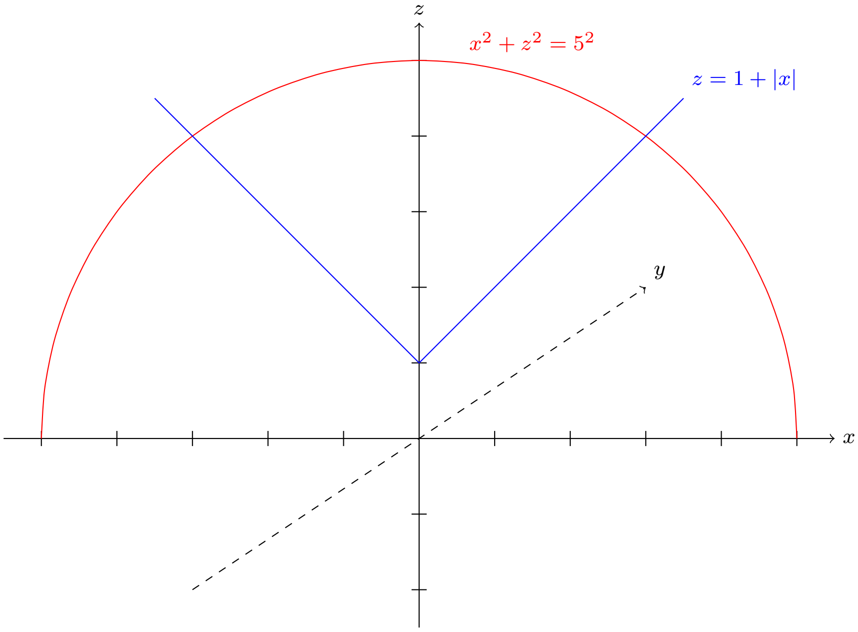
c) Bestäm masscentret för en kropp som ockuperar området K och är gjord av ett homogent material.

Lösning a)

Symmetriskt i xy - låt oss studera formen i xz-planet!

Där gäller att $1+|x| \leq z \leq \sqrt{25-x^2}$.

Låt oss skissa dessa,



och sedan är det bara att vi roterar detta runt z-axeln.

Lösning b)

Flödet Φ ut ur K ges av

$$\Phi = \int\limits_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_{K} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}V \tag{34}$$

enligt Gauss sats. Divergensen är $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = z + z + 2z = 4z$, så Gauss sats passar väl här!

Flödet ges alltså av

$$\begin{aligned}
\Phi &= 4 \int\limits_{K} z \, \mathrm{d}V = 4 \iint\limits_{\pi(K)} \int\limits_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2 \iint\limits_{\pi(K)} \left[z^2\right]_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= 2 \iint\limits_{\pi(K)} 25 - x^2 - y^2 - \left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= 2 \iint\limits_{\pi(K)} 25 - x^2 - y^2 - \left(1 + 2\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= 4 \iint\limits_{\pi(K)} 12 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{35}$$

För att hitta projektionen i xy-planet sätter vi de två olikheterna lika. För $r^2 = x^2 + y^2$ får vi då

$$1 + r = \sqrt{25 - r^2} \quad \Longrightarrow \quad 1 + 2r + r^2 = 25 - r^2 \quad \Longrightarrow \quad r^2 + r - 12 = 0 \tag{36}$$

vars enda lösning $r > 0$ är $r = 3$. Alltså är $\pi(K)$ lika med cirkelskivan $r \leq 3$. Flödet kan alltså vidare beräknas till

$$\begin{aligned}
\Phi &= 4 \int\limits_{0}^{3} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(12 - r^2 - r\right) r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = 8\pi \int\limits_{0}^{3} 12r - r^3 - r^2 \, \mathrm{d}r \\
&= 8\pi \left[6r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3\right]_0^3 = 8\pi \left(54 - \frac{1}{4} \cdot 81 - 9\right) = 8\pi \cdot \frac{99}{4} = 198\pi.
\end{aligned} \tag{37}$$

Lösning c)

Låt oss beteckna masscentret $\boldsymbol{m} = (m_x, m_y, m_z)$.

Av symmetriskäl måste det gälla att $m_x = m_y = 0$. Däremot är $m_z \neq 0$ så den behöver vi beräkna. Den ges av

$$m_z = \frac{\int\limits_K z \, \mathrm{d}V}{\int\limits_K \mathrm{d}V}. \tag{38}$$

Vi har redan beräknat täljaren (se deluppg. (b)), men vi behöver beräkna nämnaren. Vi har

$$\begin{aligned} V = \int\limits_K \mathrm{d}V &= \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{1+r}^{\sqrt{25-r^2}} r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int\limits_0^3 \left(\sqrt{25-r^2} - 1 - r\right) r \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \left(\int\limits_0^3 r\sqrt{25-r^2} \, \mathrm{d}r - \int\limits_0^3 r + r^2 \, \mathrm{d}r \right). \end{aligned} \tag{39}$$

Den första delintegralen I_1 beräknas med variabelsubstitutionen $u = 25 - r^2, \mathrm{d}u = -2r \, \mathrm{d}r$,

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int\limits_0^3 -2r\sqrt{25-r^2} \, \mathrm{d}r = -\frac{1}{2} \int\limits_{25}^{16} \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{16}^{25} = \frac{1}{3} (125 - 64) = \frac{61}{3}. \tag{40}$$

Den andra delintegralen I_2 beräknas direkt

$$I_2 = \int\limits_0^3 r + r^2 \, \mathrm{d}r = \left[\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 \right]_0^3 = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}. \tag{41}$$

Volymen ges alltså av

$$V = 2\pi \left(\frac{61}{3} - \frac{27}{2} \right) = 2\pi \cdot \frac{41}{6} = \frac{41}{3}\pi \tag{42}$$

och därmed ges m_z av

$$m_z = \frac{\frac{1}{4} \cdot 198\pi}{\frac{41}{3}\pi} = \frac{198}{4} \cdot \frac{3}{41} = \ldots = \frac{297}{82}. \tag{43}$$

Masscentrum ligger alltså i $(0, 0, 297/82)$.

Tenta 2017-03: Uppgift 6

Beräkna

$$\oint\limits_\gamma y \, \mathrm{d}x - x \, \mathrm{d}y + \left(z^2 - xy\right) \, \mathrm{d}z \tag{44}$$

där γ är skärningskurvan mellan den paraboliska cylindern $z = y^2$ och den cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = 9$, orienterad moturs sett uppifrån längs z-axeln.

Tips: Orienteringen innebär att γ är positivt orienterad som rand till det positivt orienterade stycket av den paraboliska cylindern.

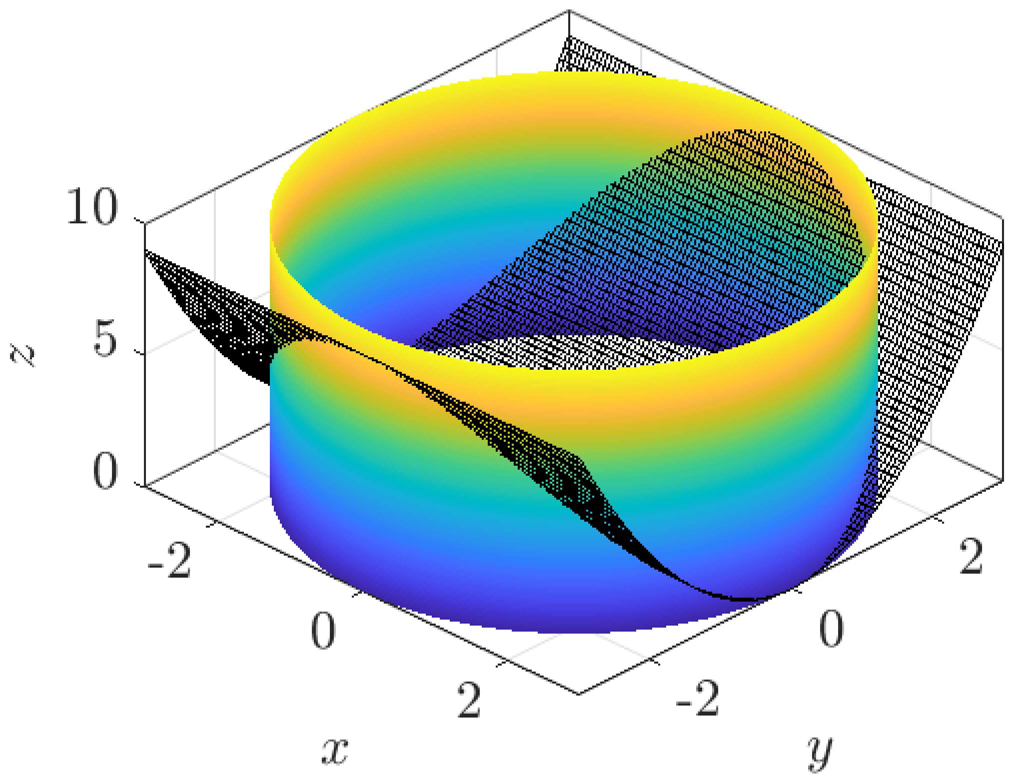
Lösning

Låt oss börja med att identifiera området.

Sambandet $z = y^2$ ger oss som en $y = x^2$-kurva, fast i yz-planet, som inte förändras när x förändras.

Sambandet $x^2 + y^2 = 9$ ger oss en cylinder med radie 3.

Om vi skissar dessa får vi något likt det vi ser i Figur 1.



Figur 1: De två ytorna.

Vi har alltså vektorfältet $\boldsymbol{F} = (y, -x, z^2 - xy)$ och kurvintegralen kan skrivas om med Stokes sats till

$$I = \oint_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{Y} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{45}$$

där Y alltså är ytan som kurvan inringar. Rotationen ges av

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z^2 - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 0 \\ 0 - (-y) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Enkelt uttryck för rotationen $\implies$ Stokes passar nog väl!

Ytan kan parametriseras med x och y enligt

$$\boldsymbol{r}(x, y) = \left(x, y, y^2\right) \tag{47}$$

där x och y ligger i cirkeln $x^2 + y^2 \leq 3^2$. En normal till ytan utgörs alltså av

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 2y \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Alltså kan ytelementet skrivas

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \cdot |\boldsymbol{n}|\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (0, -2y, 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{49}$$

och vår integral då skrivas

$$I = \iint\limits_{\pi(Y)} (-x, y, -2) \cdot (0, -2y, 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2 \iint\limits_{\pi(Y)} y^2 + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{50}$$

Projektionen av Y är en cirkel med radie $r \leq 3$, så vi övergår till polära koordinater,

$$I = -2 \int\limits_0^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(\rho^2 \sin^2\theta + 1\right) \rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho = -2 \int\limits_0^3 \rho \left(\int\limits_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta + \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\rho. \tag{51}$$

Nu behöver vi alltså beräkna två delintegraler. Den första ges av

$$I_1 = \rho^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \pi\rho^2. \tag{52}$$

Den andra är bara 2π. Den totala integralen är alltså

$$I = -2 \int\limits_0^3 \rho \left(\pi\rho^2 + 2\pi\right)\,\mathrm{d}\rho = -2\pi \int\limits_0^3 \left(\rho^3 + 2\rho\right)\,\mathrm{d}\rho = -2\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4 + \rho^2\right]_0^3 = ... = -\frac{117}{2}\pi. \tag{53}$$

Tenta 2017-06: Uppgift 1

Låt $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten (3,1) och i riktning mot punkten (4,4). Bestäm också ekvationen för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten (3,1,4/11).

b) Motivera, utan att åberopa derivator av något slag, varför $f(x, y)$ antar både ett största och ett minsta värde i den slutna kvadranten $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Bestäm sedan dessa värden (eventuellt med hjälp av derivator nu).

Lösning a

Vi börjar med att ta fram gradienten, vilken finnes genom att derivera m.a.p. båda funktionsvariablerna,

$$f'_x = \frac{1 \cdot (1 + x^2 + y^2) - (x + y) \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \overset{(3,1)}{=} \frac{1 - 9 + 1 - 6}{11^2} = -\frac{13}{121}, \tag{54a}$$

$$f'_y = [\text{symmetri}] = \frac{1 + x^2 - y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \overset{(3,1)}{=} \frac{1 + 9 - 1 - 6}{11^2} = \frac{3}{121}. \tag{54b}$$

Riktningen från (3,1) till (4,4) ges av $\boldsymbol{u} = (4, 4) - (3, 1) = (1, 3)$. Riktningsderivatan ges av storleken av gradienten projicerad på riktningsvektorn, dvs.

$$\nabla f \cdot \hat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{121}(-13, 3) \cdot \frac{(1, 3)}{\sqrt{10}} = \frac{-13 + 9}{121\sqrt{10}} = -\frac{4}{121\sqrt{10}}. \tag{55}$$

Tangentplanets ekvation lyder i allmänhet

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \tag{56}$$

Punkten (x_0, y_0, z_0) är given i uppgiften och vi har redan beräknat derivatorna, så det är bara att stoppa in:

$$\begin{aligned} z - \frac{4}{11} &= -\frac{13}{121}(x-3) + \frac{3}{121}(y-1), \\ \frac{13}{121}x - \frac{3}{121}y + z &= \frac{4}{11} + \frac{39}{121} - \frac{3}{121}, \\ 13x - 3y + 121z &= 44 + 39 - 3 = 80. \end{aligned} \tag{57}$$

Lösning b

Sluten kvadrant..?

Vi ser snabbt att $f = 0$ i både origo och "i oändligheten", att $f \geq 0$ samt att f saknar singulära punkter. Alltså är 0 minsta värdet och f måste anta ett största värde.

Hur hittar vi största värdet då?

För det inre området kan vi undersöka var $\nabla f = \mathbf{0}$, men vi behöver även undersöka områdets rand, dvs. x- och y-axlarna.

Det inre området

Vi kan använda de tidigare härledda derivatorna för gradienten. De är enbart noll då deras täljare är noll, så vi har

$$1 - x^2 + y^2 - 2xy = 0, \tag{58a}$$

$$1 + x^2 - y^2 - 2xy = 0 \tag{58b}$$

vilket ger oss, om vi lägger ihop ekvationerna, att

$$2 - 4xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad xy = \frac{1}{2} \quad \overset{(58a)}{\Longrightarrow} \quad x^2 = y^2 \quad \Longrightarrow \quad x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{59}$$

Funktionsvärdet i denna punkt är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2/\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{60}$$

Randen

Eftersom $f(y, x) = f(x, y)$ så räcker det att vi kollar en av axlarna. Låt oss införa en delfunktion för randen,

$$g(x) = f(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2}. \tag{61}$$

Denna funktion g är noll i origo och "i oändligheten", så dess maximum måste ligga däremellan. Vi deriverar g och sätter till noll,

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \tag{62}$$

vilken endast är noll då täljaren är noll, dvs

$$1 - x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1. \tag{63}$$

Funktionsvärdet i denna punkte är $g(1) = \frac{1}{2}$.

Sammanställning

Eftersom $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$ är det största värdet $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (Det minsta var som sagt 0.)

Tenta 2017-06: Uppgift 3

a) Beräkna

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\mathrm{e}^{2y}}{4-y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \tag{64}$$

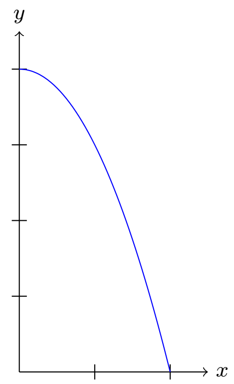
b) Bestäm, med bevis, värdet av

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \tag{65}$$

b-uppgiften utgår!

Lösning a)

Svår integrand (att integrera m.a.p. y först)! Kan den bli lättare om vi omformulerar gränserna? Låt oss skissa gränserna!



Vi har att

$$y = 4 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{4-y} \tag{66}$$

så vi kan omformulera gränserna så att integralen är

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x\mathrm{e}^{2y}}{4-y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^4 \frac{\mathrm{e}^{2y}}{4-y} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{4-y}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 \mathrm{e}^{2y} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^8 - 1\right). \end{aligned} \tag{67}$$