

Presentation grupp 5C

Filip Bergqvist, Andreas Erlandsson, Simon Franklin

Karl Hallström, Olle Lyth Andersson, Jacob Welanders

Mars 2021

1 Dubbelintegraler över godtyckliga områden

Definition 1: Låt $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakta men i övrigt godtyckliga mängder och låt en funktion $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Funktionen nollutvidgning till D_2 är då $f_{D_2} : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ där

$$f_{D_2}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in D_1 \\ 0 & , \mathbf{x} \in D_2 \setminus D_1 \end{cases} . \quad (1)$$

Detta kan nu användas för att definiera dubbelintegraler över ett kompakt område $D \subseteq \mathbb{R}$. Låt då $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på D och låt Δ vara en axelparallell rektangel så att $D \subseteq \Delta$. Då kommer

$$\iint_{\Delta} f_{\Delta}(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D f(x, y) dx dy \quad (2)$$

eftersom $f_{\Delta}(x, y) = 0$ överallt utanför D .

Detta görs genom att skapa en partition av Δ och införa trappfunktioner $\Phi(x, y)$ och $\Psi(x, y)$ som är konstanta på varje ruta i partitionen så att $\Phi \leq f_{\Delta}(x, y) \leq \Psi$ på Δ . Då kommer f_{Δ} vara integrerbar över Δ om vi kan välja partitionen så att $\forall \varepsilon \geq 0 \exists \Phi, \Psi$ och

$$\iint_{\Delta} \Psi dx dy - \iint_{\Delta} \Phi dx dy \leq \varepsilon. \quad (3)$$

Visuellt blir det tre sorters rutor som man behöver kunna integrera över, de helt utanför eller innanför D och de på randen av D , ∂D . På rutor som ligger helt utanför D kommer $\Phi = \Psi = 0$ vilket innebär att dessa rutor inte bidrar någonting till differensen i (3). Rutor helt i D kan integreras över på samma sätt som för axelparallella rektanglar då f är kontinuerlig på alla rutor innanför ∂D . På de rutor som innehåller ∂D kan däremot en diskontinuitet uppstå på ∂D . För att behandla detta låter vi nu $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ beteckna de rutor som snittar ∂D så att $\partial D \subseteq A$. På varje delruta A_i kommer nu $\Phi = 0$ medan $\Psi = \max\{f(x, y) | (x, y) \in A_i\}$ då rutan både snittar D_1 och $D_2 \setminus D_1$. Vi behöver nu endast uppfylla, för ett godtyckligt $\varepsilon \geq 0$,

$$\iint_A \Psi dx dy \leq \varepsilon \quad (4)$$

för att (3) också ska kunna uppfyllas för ett godtyckligt $\varepsilon \geq 0$. För att (4) nu ska gälla måste arean av A kunna göras godtyckligt litet eftersom $\Psi \neq 0$ i allmänhet. ∂D måste alltså vara en nollmängd.

Definition 2: En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ kallas för en nollmängd om det för varje $\varepsilon \geq 0$ existerar ändligt många axelparallella rektanglar $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ så att

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Delta_i \text{ och } \sum_{i=1}^n \text{Area}\{\Delta_i\} \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Definition 3: En kompakt mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ är kvadrerbar om ∂M är en nollmängd enligt Definition 2.

Om D är kvadrerbar så att ∂D uppfyller Definition 2 och således är en nollmängd kommer vi kunna välja partitioner så att (4) gäller för godtyckligt $\varepsilon \geq 0$. Vilket leder till följande sats.

Sats: Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en kompakt och kvadrerbar mängd medför detta att varje kontinuerlig funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar över D .

2 Trippelintegraler

Trippelintegraler kan användas för att beräkna volymer i $\mathbb{R}^3$. Teorin för integraler över kompakta och kvadrerbara områden i $\mathbb{R}^2$ är enkel att utvidga till $\mathbb{R}^3$. Skillnaden är att en mängd i $\mathbb{R}^3$ är kvadrerbar om dess rand saknar volym (area i $\mathbb{R}^2$).

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd. Då gäller att:

$$\text{vol}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz. \quad (6)$$

Ett vanligt scenario är att D ligger mellan två funktionsgrafer. Då gäller:

$$D = \{(x, y, z) : f(x, y) \leq z \leq g(x, y), (x, y) \in \Pi(D)\} \implies \text{vol}(D) = \iint_{\Pi(D)} dx \, dy \int_f^g dz \quad (7)$$

där f och g är kontinuerliga funktioner och $\Pi(D)$ är projektionen av D i (x, y) -planet.

Exempel: För $u > 0$ låt $T_u = T_{(3,u)} = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq u\}$ vara en tetraeder i $\mathbb{R}^3$ med sidlängd u . Vi har att $0 \leq z \leq u - x - y$, vilket tillsammans med $\Pi(D)$ ger

$$\text{vol}(T_{(3,u)}) = \iint_{\Pi(D)} (u - x - y) \, dx \, dy = \int_0^u dx \int_0^{u-x} (u - x - y) \, dy = \dots = \frac{u^3}{6}. \quad (8)$$

2.1 Massa

En kropp ockuperar det kompakta och kvadrerbara området $K \subseteq \mathbb{R}^3$ och dess densitet kan beskrivas med funktionen $\rho(x, y, z)$. Då kan den totala massan beräknas med en trippelintegral:

$$M = \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (9)$$

2.2 Medelvärde och masscentrum

Låt $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ vara en integrerbar funktion av tre variabler och $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd. **Medelvärdet** av f på D ges då av:

$$\bar{f}_D = \frac{1}{\text{vol}(D)} \cdot \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \frac{\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz} \quad (10)$$

Masscentrumet för ett objekt ges från medelvärdet av positionen av dess massa. Därmed ges $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$ av:

$$m_x = \frac{\iiint_D x \cdot \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz} \quad (11)$$

(Samma sak kan göras för m_y och m_z genom att byta ut x mot y eller z i täljarens trippelintegral)

2.3 Enhetsklotet

Det n -dimensionella enhetsklotet, B_n , ges av mängden:

$$B_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\} \quad (12)$$

Vi har också att volymen för enhetsklotet ges av den multipla integralen:

$$\mu_n = \iint \dots \int_{B_n} 1 \, d\mathbf{x} \quad (13)$$

Sats: Vi har denna rekursionsformel för μ_n :

$$\begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = \pi \\ \mu_n = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases} \quad (14)$$

Bevisidé: För $n = 1$ ges "volymen" av längden av streckan -1 till 1 , för $n = 2$ ges "volymen" av arean för cirkelskivan med radien 1 . Vi kan sedan skriva om $\|\mathbf{x}\| \leq 1 \Leftrightarrow x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2$. Man tillämpar sedan Fubinis sats och därefter metoden för nivåytor i $n - 2$ dimensioner och får då:

$$\mu_n = \pi \int_0^1 \mu_{n-2}(n-2)(1-u^2)u^{n-3} \, du \quad (15)$$

Vilket är lika med vårt uttryck i rekursionsformeln (14).

2.4 Vanliga koordinatbyten i $\mathbb{R}^2$

2.4.1 Cylindriska koordinater

Vid bytet från kartesiska till cylindriska koordinater går man $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$ där z är höjden från xy -planet. r och θ är sedan de polära koordinaterna

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (16)$$

Funktionaldeterminanten för koordinatbytet blir densamma som för bytet till polära koordinater då endast x och y berörs

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, z)} = r. \quad (17)$$

2.4.2 Sfäriska koordinater

Vid bytet till sfäriska koordinater går man $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$ där r är avståndet från origo, θ är vinkeln mellan punkten och den positiva z -axeln, och ϕ är vinkeln mellan punktens projektion på xy -planet och den positiva x -axeln

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z = r \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (18)$$

Funktionaldeterminanten för detta koordinatbyte blir då

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \phi, \theta)} = r^2 \cdot \sin \theta. \quad (19)$$

3 Kurvor

3.1 Kurvors definition och terminologi

Definition 4: Låt $a \leq b$ vara reella tal, låt $k \geq 0$ och $n \geq 1$ vara heltal. En C^k -funktion

$$\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n \quad (20)$$

kallas för en parametriserad och orienterad C^k -kurva i $\mathbb{R}^n$. Ofta brukar man slarva och bara skriva/säga kurva.

$\mathbf{r}(a)$ kallas för kurvans startpunkt, och $\mathbf{r}(b)$ kallas för kurvans slutpunkt. Vidare kallas kurvan sluten om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, och enkel om det $\forall t_1, t_2 : a \leq t_1 < t_2 < b$ gäller att $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$.

3.2 Orientering och parametrisering

För följande begrepp är det fördelaktigt att betrakta en kurva som en bana som en partikel rör sig längs ett tidsintervall. Kurvans orientering är då åt vilket håll partikeln rör sig på kurvan. För att byta orientering görs ett så kallat orienteringsbyte, genom att ersätta $\mathbf{r}$ med

$$\mathbf{s} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n \quad (21)$$

där $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(a+b-t)$. På så sätt blir startpunkten slutpunkten, och vice versa, med behållen kurvform.

Parametrisering beskriver exakt var partikeln befinner sig vid varje tidpunkt, För att partikeln till exempel ska färdas snabbare i början, eller färdas över ett annat tidsintervall, görs ett parameterbyte. Då ersätts $\mathbf{r}$ med

$$\mathbf{s} : [c, d] \mapsto \mathbb{R}^n \quad (22)$$

och det införs en C^k -funktion

$$\varphi : [a, b] \mapsto [c, d] \quad (23)$$

med följande egenskaper:

- I. $\varphi(a) = c$ och $\varphi(b) = d$.
- II. φ är växande.
- III. $\mathbf{s}(\varphi(t)) = \mathbf{r}(t) \forall t \in [a, b]$.

3.3 Hastighet, fart och acceleration

Definition 4: Låt $\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ vara en parametriserad och orienterad C^1 -kurva. För varje $t \in [a, b]$ kallas $\mathbf{r}'(t)$ för hastigheten vid tiden t , och $\|\mathbf{r}'(t)\|$ kallas för farten vid tiden t . Notera att hastigheten bildar en tangentvektor till kurvan vid tiden t , och att farten är längden av denna vektor.

Definition 5: Låt $\mathbf{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ vara en parametriserad och orienterad C^2 -kurva. För varje $t \in [a, b]$ kallas $\mathbf{r}''(t)$ för accelerationen vid tiden t .

3.4 Längden av en C^1 -kurva

Under en infinitesimal tid $[t, t+dt]$, gäller att en partikel som rör sig efter C^1 -kurvan $\mathbf{r}$ hinner förflytta sig $dL = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$ längdenheter. Genom att integrera båda leden får vi alltså att den totala längden mellan två punkter $\mathbf{r}(a)$ och $\mathbf{r}(b)$ på kurvan ges av

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (24)$$

Vidare gäller även att denna formel är väldefinierad, d.v.s. att den är oberoende av hur kurvan är parameteriserad.

Ett specialfall som är värt att notera är då den undersökta C^1 -kurvan representerar en funktionsgraf i $\mathbb{R}^2$. Det naturliga sättet att parameterisera kurvan blir i detta fall $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$. Genom derivering och insättning i (24) erhålls sambandet

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (25)$$

där $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$ är kurvans ändpunkter.

3.5 Kurvor i fysik

Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara två C^1 -kurvor i $\mathbb{R}^n$. Genom tillämpning av produktregeln kan det härledas att tidsderivatan för skalärprodukten av $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ kan skrivas som

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t). \quad (26)$$

Skalärprodukten för kurvor tillämpas inom fysik för att beräkna skillnader i kinetisk energi hos partiklar som rör sig i kurvbanor. Låt en partikel följa C^1 -kurvan $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Genom användning av integralkalkylens fundamentalsats och Newtons andra lag kan det härledas att skillnaden i kinetisk energi mellan två punkter $\mathbf{r}(a)$ och $\mathbf{r}(b)$ på kurvan kan beräknas som

$$\Delta E_k = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (27)$$

där $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ är ett kraftfält och $\mathbf{r}'(t)$ är partikelns hastighet. På grund av dess fysikaliska tolkning brukar detta kallas för arbetsintegralen.

På samma sätt som för skalärprodukten så kan tidsderivatan av kryssprodukten mellan två kurvor $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ i $\mathbb{R}^3$ beräknas enligt

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t). \quad (28)$$

Kryssprodukten tillämpas fysikaliskt på s.k. centralrörelser.

Definition: En partikel sägs utföra en centralrörelse med avseende på en punkt P om kraften som den upplever alltid är riktad mot P .

Definition: En partikels vinkelmoment med avseende på en punkt P ges av

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (29)$$

där $\mathbf{r}$ är Ortsvektorn med avseende på P .

Med hjälp av dessa definitioner, samt (28) och Newtons andra lag, kan vi ställa upp Keplers lag:

Keplers lag: Om en partikel följer en centralrörelse kring en punkt P så är dess vinkelmoment med avseende på punkten konstant.

Denna kan i sin tur delas upp i två relevanta konsekvenser, vilka tillsammans utgör en alternativ uppställning av Keplers lag.

I. Partikeln rör sig i ett plan.

II. Partikeln sveper ut en area i planet kring centralpunkten i konstant takt.

4 Ytor

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd och $n \geq 3$, $k \geq 1$, $n, k \in \mathbb{N}$. En C^k -funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas för en parametriserad C^k -yta i $\mathbb{R}^n$.

Notation: Om vi har en C^k -yta enligt definitionen ovan där $n = 3$ gäller

$$(s, t) \rightarrow \mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)). \quad (30)$$

Vidare kan vi härleda följande uttryck för arean av ytan:

$$A = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt \quad (31)$$

där kryssprodukten av $\mathbf{r}$'s partiella derivator är en normalvektor till ytans tangentplan i punkten $\mathbf{r}(s, t)$ och normen av samma kryssprodukt kan tolkas som arean $d\mathbf{S}$ av ett infinitesimalt parallelogram i detta tangentplan.

Det finns två specialfall av ytor i rummet vilka är värda att studera vidare.

1) Ytan tillhör en funktionsgraf $z = f(x, y)$. Då är den naturliga parametreringen

$$(x, y) \rightarrow \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad (32)$$

Från (31) kan vi härleda följande formel för arean av en funktionsyta:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (33)$$

2) Ytan är en nivåyta på formen $F(x, y, z) = C$. Antag att $F_z \neq 0$. IFS $\implies z = f(x, y)$. Då kan ytarean beräknas enligt formeln

$$A = \iint_{D=\Pi(Y)} \frac{\|\nabla F\|}{F_z} dx dy. \quad (34)$$