

Flervariabelanalys läsvecka 4 och 5

Grupp 5D

2021-02-19

1 Dubbelintegraler över kvadrerbara områden

Vi har hittills endast behandlat dubbelintegraler över (axelparallella) rektangulära områden, men vi ska nu utöka till att omfatta områden med en mer godtycklig form. För att kunna göra detta behöver vi definiera nollutvidningen av en funktion.

Nollutvidningen definitioner:

Låt $D_1 \subseteq D_2$ vara delmängd i $\mathbb{R}^n$ och $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion. Nollutvidningen av f till D_2 är funktionen $f_{D_2} : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ givet av:

$$f_{D_2}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{om } \mathbf{x} \in D_1 \\ 0 & \mathbf{x} \in D_2 \setminus D_1, \end{cases} \quad (1)$$

vilket är väldigt snarligt men skillnaden blir att f_{D_2} är definierad även utanför D_1 , och har värdet 0 där, medan f är odefinierad. Med detta kan man definiera **dubbelintegralen** av f över D på följande vis:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f_\Delta(x, y) dx dy, \quad (2)$$

där Δ är en godtycklig axelparallell rektangel som uppfyller $D \subseteq \Delta$. Eftersom nollutvidningen f_Δ är 0 utanför D spelar formen eller storleken på Δ ingen roll, bortsett från att D måste vara en delmängd av Δ .

Enligt definition så är en funktion f_Δ integrerbar om man kan 'stänga in den' godtyckligt väl mellan två trappfunktioner, som agerar som nedre respektive övre begränsningar för f_Δ . Om man nu delar upp Δ i mindre och mindre rektanglar så kan man utan problem integrera över rektanglarna som ligger helt innanför randen av D , (eftersom vi sedan innan definierat integraler över axelparallella rektanglar), och på de rutor som ligger utanför D blir integralen uniformt 0. Det som blir problematiskt är de rutor som skärs av randen ∂D , eftersom det inte går att 'stänga in' f_Δ på ett tillräckligt bra sätt. Detta då den nedre uppskattningen måste vara ≤ 0 , medan den övre måste vara större än $\text{Max}(f_\Delta)$ i den rutan. Detta är något som behöver undersökas. För att metoden ska hålla måste arean av 'randrektanglarna' gå mot 0 när indelningen i rektanglar blir finare och finare, vilket leder oss till definitionen av **nollmängd** och **kvadrerbar mängd**.

I ord innebär **nollmängd** en mängd i $\mathbb{R}^2$ som man kan 'stänga in', dvs göra delmängd till en annan mängd uppbyggd av ett ändligt antal axelparallella rektanglar, och att arean av unionen av dessa rektanglar är godtyckligt liten. Eftersom vår ursprungliga mängd är en delmängd av rektangelmängden går i detta fall även dess area mot 0, (vilket låter som det vi ville i föregående stycke).

En mängd var rand är en **nollmängd** kallas då en **kvadrerbar mängd**

Det går att visa att alla ändliga C^1 -kurvor är nollmängder, och även vissa C^0 -kurvor. I synnerhet är varje **reguljärt område** kvadrerbart.

För C^0 -kurvor uppfyller bland annat vanliga ändliga envariabelgrafer $f(x) = y$ nollmängdsvillkoren, men C^0 -kurvor kan också se väldigt underliga ut, och uppfyller som sagt inte alltid kraven för nollmängd. T.ex kan detta inträffa när kurvan innehåller 'spiraler', dvs när den kan ha flera y -värden för samma x -värde. Bland dessa spiralkurvor finns det C^0 -kurvor som har positiv area, s.k **space filling curves**.

Det allt detta leder till är att man kan definiera dubbelintegraler över kvadrerbara områden, dvs formellt:

Sats: Låt D vara ett kompakt område i $\mathbb{R}^2$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Om D är kvadrerbart så är f integrerbar över D .

2 Trippelintegraler

Det största fokuset kring trippelintegraler är deras fysikaliska tillämpningar. Materialet i sig skiljer sig inte från dubbelintegraler. Vi skall nu använda oss av olika strategier för att beräkna volym av olika kroppar med hjälp av trippelintegraler.

Definition 1. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt och kvadrerbart område. Således är

$$Vol(D) = \iiint_D 1 \cdot dx dy dz. \quad (3)$$

2.1 Metoder

D är ofta ett område mellan två funktionsytor. Notationen brukar se ut som följer. $\{(x, y, z) | f(x, y) \leq z \leq g(x, y), (x, y) \in E\}$.

E är i detta fallet "skuggan" som uppkommer i xy -planet ifall solen hade legat rakt över z -axeln. Formellt sägs E vara projektionen av D på xy -planet och betecknas $\pi_{xy}(D)$. Målet är att reducera till en dubbelintegral genom att integrera bort en variabel. Låt oss kalla detta en "2+1 Fubini". Efter reducering till dubbelintegral kan tidigare kända metoder tillämpas.

$$Vol(D) = \iint_E dx dy [g(x, y) - f(x, y)]. \left(= \iint_{\pi_{xy}(D)} dx dy \int_{z=f(x,y)}^{z=g(x,y)} dz \right) \quad (4)$$

Anmärkning: Ibland kan det vara till hjälp att använda sig av nivåytor istället.

Beroende på typ av problem kan det vara lämpligt att göra ett koordinatbyte. Några av dessa skall nu introduceras.

2.1.1 Cylindriska koordinater

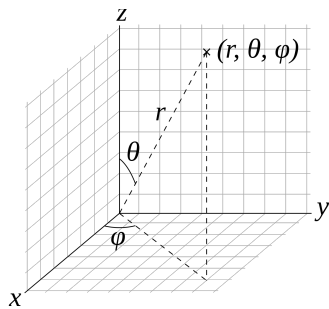
Samma som polära koordinater, fast behåll z .

$$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, z)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \Rightarrow dV = dx dy dz = r dr d\theta dz. \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

2.1.2 Sfäriska koordinater

Med sfäriska koordinater blir transformationen $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \phi)$ och visualiseras som bilden nedan.



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \Rightarrow dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Där $r^2 \sin \theta$ kommer från Jacobianen, det vill säga $r^2 \sin \theta = \frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\phi)}$.

Exempel:

Klotets volym är som känt $\frac{4\pi R^3}{3}$. Vi verifierar detta genom att beräkna en trippelintegral med sfäriska koordinater.

Låt $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

$$Vol = \iiint_{klot} 1 \cdot dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (6)$$

Vilket skulle visas. ■

3 Tillämpningar av trippelintegraler

3.1 Massaberäkning med hjälp av trippelintegraler

En trippelintegral kan tolkas geometriskt som en tecknad volym i $\mathbb{R}^4$. Däremot en fysisk tolkning av trippelintegralen

$$\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

kan vara att man betraktar funktionen ρ , som en varierande densitet över kroppen D , där $D \subseteq \mathbb{R}^3$ är ett kvadrerbart område som kroppen ockuperar och $dx dy dz$ är en infinitesimal volym i kroppen. Densiteten gånger volymen blir massa, integration över D ger då massan för hela kroppen.

3.2 Medelvärde och masscentrum

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^4$ vara ett kompakt kvadrerbart område och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Medelvärdet av f i D är

$$\frac{1}{Vol(D)} \iiint_D f dx dy dz = \frac{\iiint_D f dx dy dz}{\iiint_D dx dy dz}$$

där täljaren är totala tecknade volymen under grafen f i $\mathbb{R}^4$ samt nämnaren är volymen av D .

Masscentrum för en kropp är det viktade medelvärdet av varje infinitesimal volym i kroppen. Det är medelvärdet av massans position och betecknas $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$. Varje axels masscentrum beräknas på följande vis

$$m_x = \frac{\iiint_D x \rho dx dy dz}{\iiint_D \rho dx dy dz}.$$

Samma beräkning görs med andra axlar genom att byta ut x till den önskade axeln.

3.3 Multipelintegraler

Teorin som vi känner till för dubbelintegraler gäller även för integraler i $\mathbb{R}^n$ och betecknas som

$$\int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

som även kan skrivas som

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

där $\int$ representerar en n -dimensionell integral.

Lemma 1. Klotet $B_{n,r}$ i $\mathbb{R}^2$ med radie $r \geq 0$ har $\mu(B_{n,r}) = r^n \mu(B_n)$.

Sats 1. Låt $B_{n,1}$ vara det n -dimensionella enhetsklotet. Volymen av B_n , som betecknas med $\mu(B_n)$, kan skrivas med följande rekursionsformel:

$$\mu(B_1) = 2, \quad \mu(B_2) = \pi, \quad \mu(B_n) = \frac{2\pi}{n} \mu(B_{n-2}), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (7)$$

4 Kurvor

4.1 Definition

En parametriserad och orienterad C^k -kurva i $\mathbb{R}^n$ definieras av en C^k -funktion

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad (8)$$

där $a \leq t \leq b$, $k \geq 0$ och $n \geq 1$. $\mathbf{r}(a)$ kallas för kurvans startpunkt och $\mathbf{r}(b)$ kallas för kurvans slutpunkt. Om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ kallas kurvan sluten och om $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ då $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, är kurvan enkel.

$\mathbf{r}(t)$ kan ses som en funktion som beskriver en partikels position på kurvan vid tiden t .

4.2 Orienteringsbyte

Vid ett orienteringsbyte ersätts $\mathbf{r}(t)$ med $\mathbf{s}(t)$, där $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(b + a - t)$. Detta innebär att $\mathbf{r}(b)$ blir startpunkten och att $\mathbf{r}(a)$ blir slutpunkten.

4.3 Parametreringsbyte

Om vi har två funktioner

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{s} : [c, d] &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (9)$$

av klassen C^k där $a \leq b$ och $c \leq d$, sägs de vara olika parametreringar av samma orienterade C^k -kurva om det finns en bijektiv C^k -funktion $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ som uppfyller dessa krav:

1. $\phi(a) = c$ och $\phi(b) = d$,
2. ϕ är växande,
3. $\forall t \in [a, b] : \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\phi(t))$.

Informellt innebär ett parametreringsbyte att en annan partikel följer samma bana men inte på samma vis.

4.4 Hastighet, fart och acceleration

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -kurva. Då definieras hastigheten vid tiden t som $\mathbf{r}'(t)$ och farten vid tiden t definieras som $\|\mathbf{r}'(t)\|$. Hastigheten är alltid tangent till kurvan och pekar åt samma riktning. Accelerationen av en C^2 -kurva vid tiden t definieras som $\mathbf{r}''(t)$.

4.5 Längd

Låt $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ vara en C^1 -kurva, då förflyttar sig en partikel sträckan $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$ under en infinitesimal tid dt . Partikeln förflyttas därmed en infinitesimal längd $ds = \|d\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$, där ds kallas för längdelementet. Kurvans totala längd kan beskrivas som integralen

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (10)$$

En C^1 -kurvas längd är oberoende av dess orientering eller parametrisering.

4.6 Skalärprodukt

Proposition 1: Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara C^1 -kurvor i $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \quad (11)$$

4.6.1 Bevis:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t))$$

Enligt skalärproduktens definition är detta samma sak som

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^n u_i(t)v_i(t))$$

Summatecknet kan flyttas utanför derivatan och ihop med produktregeln fås

$$\sum_{i=1}^n u'_i(t)v_i(t) + u_i(t)v'_i(t)$$

Då kan varje term summeras var för sig vilket ger

$$\mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \text{ v.s.v}$$

4.6.2 Fysikaliska tillämpningar

Kinetisk energi $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Låt en partikel följa en C^1 -kurva,
 $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\Delta E_k = \frac{m}{2}(\text{slutfart}^2 - \text{startfart}^2)$$

Farten är samma sak som längden av $\mathbf{r}'(t)$, vilket ger

$$\Delta E_k = \frac{m}{2}(\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \|\mathbf{r}'(a)\|^2)$$

Enligt integralkalkylens fundamentalsats är detta samma sak som

$$\Delta E_k = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}'(t)\|^2 dt$$

Om vi använder att $\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$ samt Proposition 1 får vi

$$\Delta E_k = \frac{m}{2} \int_a^b (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) + \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt$$

Då det står $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ två gånger kan vi slå ihop dem och multiplicera med 2, därefter flytta in m , så

$$\Delta E_k = \int_a^b (m \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt$$

Enligt Newtons andra lag blir det

$$\Delta E_k = \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt,$$

där $\mathbf{F}$ är den sammanlagda kraften som verkar på partikeln. Integralen på den här formen längs en C^1 -kurva i $\mathbb{R}^n$ kallas för kurvintegral eller arbetsintegral.

4.7 Kryssprodukt

Proposition 2: Låt $\mathbf{u}(t)$ och $\mathbf{v}(t)$ vara C^1 -kurvor i $\mathbb{R}^3$.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t) \quad (12)$$

Bevis på liknande sätt som Proposition 1.

4.7.1 Fysikaliska tillämpningar

Vinkelmomentum ges av

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

där $\mathbf{r}$ är Ortsvektorn m.a.p den punkt partikeln har centralrörelse runt, $\mathbf{v}$ är partikelns hastighet, $\mathbf{p}$ är det linjära momentumet

Centralrörelse - en partikel sägs ha centralrörelse i förhållande till en punkt, O, om kraften på partikeln alltid är riktad mot O.

Antag att en partikel har en centralrörelse i förhållande till en punkt, O, och att $\mathbf{r}(t)$ ger partikelns position vid tid t . Då får vi

$$\mathbf{L}(t) = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) \quad (13)$$

Med hjälp av Proposition 2 och Newtons andra lag kan det visas att

$$\frac{d}{dt}L(t) = m[\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)] + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t) = 0, \quad (14)$$

eftersom centralrörelsen medför att $\mathbf{r}$ och $\mathbf{F}$ är riktade i motsatt riktning. Därmed är deras kryssprodukt 0. Kryssprodukten av samma vektor är 0 och då blir första termen också 0.

$\rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) = 0$ (dvs konstant vinkelmomentum)

Konsekvenser

$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = 0$ medför att $\mathbf{r}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp ett plan, och därmed rör sig partikeln i ett plan.

Den infinitesimala arean som partikeln sveper över en viss infinitesimal tid är konstant

$$\frac{dA}{dt} = C$$

Dessa två konsekvenser kallas för Keplers lag.

5 Ytor

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt kvadrerbar mängd, $k \geq 0$ och $n \geq 2$ är heltal. En C^k -funktion

$$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (15)$$

kallas då för en parametriserad C^k -yta.

Notation:

$$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$D \ni (s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \quad (16)$$

5.1 Ytare

Om funktionen $\mathbf{r}$ tillämpas på en infinitesimal axelparallell rektangel med hörn i punkterna (s, t) , $(s + ds, t)$, $(s, t + dt)$, $(s + ds, t + dt)$ fås ett infinitesimalt parallelogram med hörn i punkterna $\mathbf{r}(s, t)$, $\mathbf{r}(s + ds, t)$, $\mathbf{r}(s, t + dt)$, $\mathbf{r}(s + ds, t + dt)$.

Arean på det parallelogrammet kallas för areaelementet på ytan, vilket betecknas dS . $dS = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$, där $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är sidorna från punkten $\mathbf{r}(s, t)$ i parallelogrammet. Så $\vec{u} = \mathbf{r}(s + ds, t) - \mathbf{r}(s, t)$ och $\vec{v} = \mathbf{r}(s, t + dt) - \mathbf{r}(s, t)$, vilket genom linjärisering kan skrivas som $\vec{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t)ds$ respektive $\vec{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t)dt$.

Alltså fås $dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t)ds \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t)dt \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt$. Den totala ytarean fås då av dubbelintegralen:

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt \quad (17)$$

5.2 Specialfall 1

Ytan hör till en funktionsgraf $z = f(x, y)$. Parametrisering:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)). \end{aligned} \quad (18)$$

Förutsatt att ytan är $C^1 \Leftrightarrow \mathbf{r} \in C^1 \Leftrightarrow f \in C^1$ gäller

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= (1, 0, f_x) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} &= (0, 1, f_y) \\ \vec{n} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-f_x, -f_y, 1). \end{aligned} \quad (19)$$

Detta innebär att $dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$. Alltså fås ytarean av en funktionsyta av dubbelintegralen:

$$\iint_{\Pi(Y)} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (20)$$

Där $\Pi(Y)$ är projiceringen ner till x, y -planet

5.3 Specialfall 2

Ytan är en nivåyta till en C^1 -funktion av tre variabler, m.a.o $F(x, y, z) = c$ där c är en konstant.

Antag $F_z \neq 0$ på hela nivåytan. Då säger Implicita Funktionssatsen att $z = f(x, y)$, $f \in C^1$ och $f_x = \frac{-F_x}{F_z}$, $f_y = \frac{-F_y}{F_z}$.

Som vi såg i Specialfall 1 är då ytarean

$$\iint_{\Pi(Y)} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \iint_{\Pi(Y)} \sqrt{1 + \left(\frac{-F_x}{F_z}\right)^2 + \left(\frac{-F_y}{F_z}\right)^2} dx dy = \iint_{\Pi(Y)} \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy \quad (21)$$