

Sammanfattning av LV6 i MVE035

Olof Forsberg, Hugo Mårtensson, Mary Ohms,
Csenge Papai, Tim Pagrell och Viktor Skott

19 mars 2021

1 Kurvintegraler

Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en domän, $a \leq b$ reella tal, $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ en C^1 -kurva och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (1)$$

Denna integral kallas för kurvintegralen av $\mathbf{F}$ eller för arbetet som $\mathbf{F}$ utför över sträckan. Varje position har ett värde där integralen summerar värdet över den kurva vars arbete ska beräknas.

1.1 Proposition

- Parametrisering påverkar ej integralens värde
- Byte av orientering påverkar dock och byter tecken på resultatet.

1.2 Notation

- γ och C är standardbokstäver för att beteckna kurvor
- En vanlig förkortning är:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

- En annan vanlig omskrivning är:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy \quad (3)$$

Den kommer av att $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$ och att $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. I tre dimensioner läggs $F_3 = R$ och dz till.

- Detta kommer av propositionen kring orientering. Byte av orientering betyder teckenbyte på svaret.

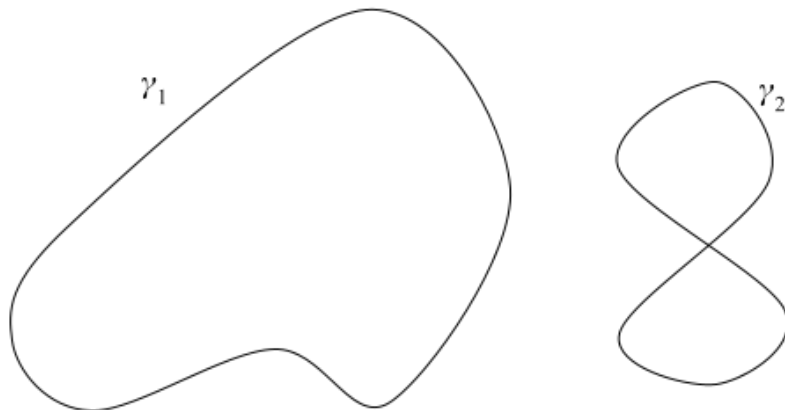
$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (4)$$

- Integraltecknet med en cirkel betyder att integrationen sker över en sluten kurva

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5)$$

1.3 Jordan curve theorem

Låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R} \setminus \gamma$ av två sammanhängande komponenter. Exempel på detta är γ_1 i figur 1. γ_2 å andra sidan, är inte enkel och delar upp $\mathbb{R}^2$ i tre komponenter.



Figur 1: γ_1 och γ_2 är två kurvor i $\mathbb{R}^2$

De två sammanhängande komponenterna som bildas av en enkel och sluten kurva kallas för kurvans insida och utsida. Insidan är alltid en begränsad mängd och utsidan är alltid en obegränsad mängd.

1.4 Definition om kurvors orientering

Låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. γ sägs vara positivt orienterad (respektive negativt orienterad) om γ 's insida är vänster (respektive höger) om färdriktningen. Enligt konvention innebär

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (6)$$

att γ är positivt orienterad.

1.5 Beräkning av kurvintegraler

Tre metoder för att beräkna kurvintegraler kommer tas upp:

- Hitta en explicit parametrisering av kurvan och beräkna följande integral från definitionen av kurvintegral:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \quad (7)$$

- Att hitta en potential till fältet $\mathbf{F}$ om $\mathbf{F}$ är konservativt.
- Använda Greens sats (främst i $n = 2$).

2 Konservativa fält

2.1 Definition

Ett vektorfält $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ i ett område $D \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara konservativt om den kan uttryckas som gradienten av ett C^1 -skalärfält $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ enligt

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi. \quad (8)$$

Φ kallas skalärpotentialen för $\mathbf{F}$ och är inte entydigt bestämd, då $\nabla\Phi = \nabla(\Phi + C)$. Eftersom konstanter försvinner vid derivering, finns alltså flera skalärfält som kan uppfylla $\mathbf{F}$.

2.2 Sats 9.4.2

Låt $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett konservativt fält med potentialen Φ i ett öppet område D . Kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ över vilken C^1 -kurva $\gamma : \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ som helst kan då skrivas som $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a})$.

2.3 Bevis

Med parameterframställningen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, av kurvan γ blir kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lika med $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$, men eftersom $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \nabla\Phi(\mathbf{r}(t))$ kan kurvintegralen skrivas som $\int_a^b \nabla\Phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$. Integralen påminner om derivatan av en sammansatt funktion, och integranden visar sig vara den sammansatta funktionen $\Phi(\mathbf{r}(t))$. Om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{a}$ och $\mathbf{r}(b) = \mathbf{b}$ blir integralen $[\Phi(\mathbf{r}(t))]_a^b = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)) = \Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a})$, där alltså a och b är start- och slutpunkten.

Satsen påminner om kalkylens fundamentalsats, men är kanske inte lika intuitiv i flera variabler. Anledningen till att kurvintegralen kan beräknas på detta sätt kan ledas tillbaka till att den är oberoende av vägen, vilket är kännetecknande hos ett konservativt vektorfält. Om det inte spelar någon roll hur vägen ser ut, så är kurvans start- och slutpunkt de enda parametrarna som kan ha påverkan på integralens värde; därav "den flerdimensionella kalkylens fundamentalsats".

2.4 Sats 9.4.3

Vidare finns ännu en sats, sats 9.4.3, som visar att sats 9.4.2 även gäller åt andra hållet. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett C^0 vektorfält. Om kurvintegralen $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \ \forall \gamma$ så är $\mathbf{F}$ konservativt.

2.5 Definition av virvelfritt vektorfält

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$ vara ett C^1 -vektorfält i $\mathbb{R}^2$. $\mathbf{F}$ är virvelfritt om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

2.6 Sats 9.4.4

Med virvelfria vektorfält definierade kan ännu en sats definieras. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett C^1 vektorfält. Då gäller:

$$\mathbf{F} \text{ konservativt} \implies \mathbf{F} \text{ virvelfritt.}$$

Observera att detta bara gäller åt ena hållet och för att lista ut om $\mathbf{F}$ är konservativt behövs mer information.

2.6.1 Bevis

Antag att $\mathbf{F}$ är konservativt. Då finns det ett skalärfält ϕ så att följande gäller:

$$\mathbf{F} = \nabla\phi \implies P = \frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ och } Q = \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (9)$$

Detta leder till att följande ekvation kan ställas upp med hjälp av Clairauts sats:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \stackrel{\text{Clairaut}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} \blacksquare. \quad (10)$$

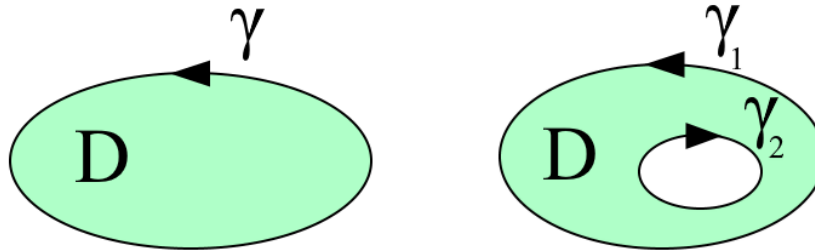
3 Greens sats i $\mathbb{R}^2$

3.1 Definition

Betrakta ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ där P och Q är två C^1 -funktioner definierade i en öppen mängd Ω i $\mathbb{R}^2$. Om delområdet D av Ω är kompakt samt har en positivt orienterad rand ∂D som består av en eller flera styckvis C^1 -kurvor så gäller att

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (11)$$

Att randen är positivt orienterad innebär att delmängden D ligger till vänster om färdriktningen för varje delkurva. Detta kan, men måste ej betyda detsamma som att gå moturs. Se figur 2.



Figur 2: I den vänstra bilden går kurvan γ moturs. Området D ligger alltid till vänster om kurvan, som alltså är positivt orienterad. I den högra bilden går kurvan γ_1 moturs, men för att randen $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ skall vara positivt orienterad behöver kurvan γ_2 gå medurs.

3.2 Bevis

Beviset är uppdelat i tre delar; Steg 1, Steg 2 och Steg 3.

Steg 1

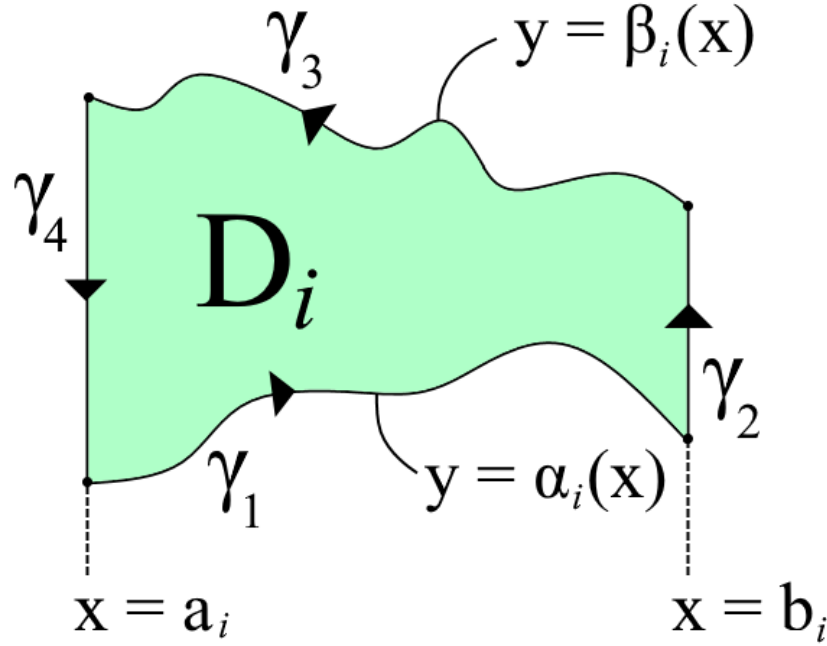
Vid antagandet att D är reguljärt i x -led ska följande visas:

$$\oint_{\partial D} Pdx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \quad (12)$$

Att området är reguljärt i x -led innebär att det kan partitioneras till ett ändligt antal delmängder; $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$, så att för varje i gäller:

$$D_i = \{(x, y) \mid a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}, \quad (13)$$

för några C^1 funktioner α_i och β_i . Vi kan rita upp en bild som illustrerar en sådan delmängd. Se figur 3.



Figur 3: Delmängden D_i med randen $\partial D_i = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

För att härleda ekvation 12 måste följande visas för alla $i = 1, \dots, n$:

$$\oint_{\partial D_i} P dx = \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (14)$$

Högerledet kan förenklas med Fubinis sats:

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_{a_i}^{b_i} dx [-P(x, y)]_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} = \\ &= \int_{a_i}^{b_i} P(x, \alpha_i(x)) dx - \int_{a_i}^{b_i} P(x, \beta_i(x)) dx = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_3} P dx. \end{aligned} \quad (15)$$

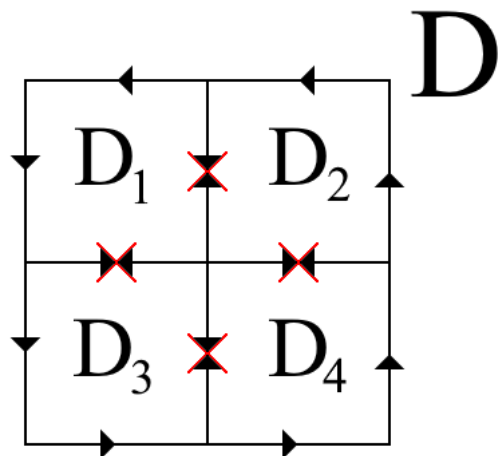
Eftersom att γ_2 och γ_4 är vertikala blir $\int_{\gamma_2} P dx = \int_{\gamma_4} P dx = 0$. Härav kan dessa integraler adderas till det förenklade högerledet utan att värdet förändras, och ekvation 14 är bevisad:

$$\text{HL} = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} P dx + \int_{\gamma_3} P dx + \int_{\gamma_4} P dx = \int_{\partial D_i} P dx = \text{VL} \quad (16)$$

För att nu visa ekvation 12 summerar vi ekvation 14 över alla i :

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (17)$$

Högerledet är per definition detsamma som $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$. Att vänsterledet är lika med $\oint_{\partial D} P dx$ visas lättast med en bild, se figur 4. Ekvation 17 ger oss alltså ekvation 12.



Figur 4: Mängden D uppdelad i fyra delmängder; D_1 , D_2 , D_3 och D_4 . Den positiva orienteringen innebär att alla kurvintegraler längs inre kanter kancellerar varandra. Kvar blir kurvintegralen över den yttre randen, alltså ∂D .

Steg 2

Detta steg använder ett direkt analogt resonemang som Steg 1, där D istället antas vara reguljärt i y -led, och visar att

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (18)$$

Steg 3

I det sista steget antas D vara reguljärt, alltså reguljärt i både x - och y -led. Då gäller både Steg 1 och Steg 2, vilket ger att

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \blacksquare. \quad (19)$$

4 Två tillämpningar av Greens sats

4.1 Först en definition:

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara enkelt sammanhängande om följande två krav är uppfyllda:

- (i): M är (bågvisst) sammanhängande
- (ii): För varje enkel, sluten kurva γ i M gäller det att dess insida helt tillhör M .

I figur 5 nedan är ett exempel på en mängd som uppfyller krav (i), att den är bågvisst sammanhängande, dock inte krav (ii) och som därmed inte är enkelt sammanhängande.



Figur 5: Den färgade mängden är bågvisst sammanhängande, däremot inte enkelt sammanhängande, då det existerar enkla kurvor som helt tillhör mängden, men vars insida inte gör det, dvs. de kurvor kring hålen.

4.2 Tillämpning 1: Sats 9.4.5

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en enkelt sammanhängande domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett C^1 -vektorfält. Då gäller:

$\mathbf{F}$ är virvelfritt $\Rightarrow \mathbf{F}$ är konservativt.

4.3 Bevis av Sats 9.4.5

Antag att $\mathbf{F} = (P, Q)$, där P och Q är två C^1 -funktioner definierade i D , är virvelfritt, det vill säga att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (20)$$

Målet är nu att bevisa att $\mathbf{F}$ under detta antagande, samt under antaganden om mängden D som görs i satsen, nödvändigtvis är konservativt. Enligt Sats 9.4.3 räcker det då att bevisa att $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje enkel, sluten C^1 -kurva γ i D , dvs. kurvintegralen dvs. arbetet som uträttas av kraftfältet på kurvan är oberoende av vägen och potentialen är noll.

Tag nu en sådan kurva γ och sätt Γ till insidan av γ , som enligt Jordans Sats är väldefinierad (kraven om att kurvan ska vara enkel och sluten uppfylla). Detta innebär att randen $\partial\Gamma$ av Γ utgörs av kurvan γ om den orienteras moturs/positivt det vill säga, Γ ligger till vänster om färdriktningen som ges av γ 's parametrisering.

Då domänen D antogs vara enkelt sammanhängande, kan slutsatsen dras att γ 's insida, Γ , helt tillhör mängden D , och att $\mathbf{F}$, vars definitionsmängd är mängden D , då är definierad i hela Γ .

Slutligen har vi alltså ett vektorfält $\mathbf{F}=(P,Q)$, där P och Q är två C^1 -funktioner definierade i en öppen och enkelt sammanhängande mängd D i $\mathbb{R}^2$, samt att delområdet $\Gamma \subseteq D$ är kompakt, det vill säga sluten (per definition) och begränsad (Jordans sats), med den positivt orienterade randen γ , som ges av en C^1 -kurva. Därför kan vi nu tillämpa Greens Sats och får:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (21)$$

Enligt antagandet om att $\mathbf{F}$ är virvelfritt är $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, och alltså kurvintegralen ovan noll, det vill säga:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (22)$$

V.S.V.

4.4 Tillämpning 2: Areaformel

Om vi i Greens Sats tar $P = y$ och $Q = 0$ får vi:

$$\oint_{\partial D} y \, dx = - \iint_D 1 \, dx \, dy = -\text{Area}(D) \quad (23)$$

Om vi i stället tar $P = 0$ och $Q = x$ får vi:

$$\oint_{\partial D} x \, dy = \text{Area}(D) \quad (24)$$

Nu går det i allmänhet med ett godtyckligt $\lambda \in \mathbb{R}$ att skriva:

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \lambda(\text{Area}(D) - \text{Area}(D)) + \text{Area}(D) \\ &= \lambda \left(\oint_{\partial D} x \, dy + \oint_{\partial D} y \, dx \right) - \oint_{\partial D} y \, dx \\ &= \lambda \oint_{\partial D} x \, dy - (1 - \lambda) \oint_{\partial D} y \, dx \end{aligned} \quad (25)$$

Oftast tar man $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ eller $\lambda = \frac{1}{2}$

5 Exempel från fysiken

Konservativa och virvelfria fält förekommer i många sammanhang runt omkring oss. I det här kapitlet ger vi exempel på tre virvelfria fält: gravitationsfält, elektriska fält och magnetiska fält.

5.1 Newtons gravitationslag

Kraften $\mathbf{F}$ som uppstår mellan två objekt kan beskrivas med $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, där G är gravitationskonstanten, M och m är objektens massor och r är avståndet mellan dem. Skriver man ut kraften komponentvis får man $\mathbf{F} = -GMm \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -GMm \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

Om man istället definierar ett skalärfält $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, där $\Phi(x,y,z) = \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ blir $\nabla \Phi = GMm \frac{-1}{2} \frac{(2x, 2y, 2z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, vilket är lika med $\mathbf{F}$ ovan. Gravitationsfältet $\mathbf{F}$ är därför konservativ och därmed även virvelfri i sin domän enligt sats 9.4.4.

5.2 Coulombs lag för elektrostatik

Det elektriska fältet $\mathbf{F} = \frac{CQq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, där q och Q är två partiklars laddningar, r är avståndet mellan dem och $C = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ är mediets elektriska permittivitet. Då mediet är homogent är ϵ en konstant.

Detta fält påminner om gravitationsfältet i föregående kapitel. Matematiskt är ett gravitationsfält och ett elektriskt fält identiskt, men till skillnad från gravitationslagen, så kan elektrostatiska krafter vara positiva (attraktiva) eller negativa (repulsiva). Om vi nu definierar $\Phi : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\Phi(x,y,z) = -\frac{CQ}{|\mathbf{r}|} = -\frac{CQ}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$. Om fältet är konservativt gäller ju $\mathbf{F} = \nabla \Phi$. Då återstår det bara att beräkna gradienten av Φ , och den visar sig vara lika med $\mathbf{F}$. Även detta är ett konservativt och virvelfritt fält.

5.3 Biot-Savart-lagen för magnetism

En konstant ström I i positiv riktning i en oändlig och infinitesimal tunn ledare längs z -axeln ger upphov till ett magnetfält $\mathbf{B}(x,y,z) = \frac{\mu I}{2\pi}(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$, förutom i $(x,y) = (0,0)$ där $\mathbf{B}$ är odefinierat. μ är mediets magnetiska permeabilitet, och i ett homogent medium det en konstant. Här är $\mathbf{B}$ odefinierat längs med hela z -axeln. Magnetfältets komponent i strömmens riktning (längs med z -axeln) är noll, och $\mathbf{B}$ kan

därför betraktas som ett tvådimensionellt vektorfält i ett ortogonalt plan. Definitionsmängden för $\mathbf{B}$ är $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. I två dimensioner kan man däremot skriva fältet som $\mathbf{B}(x, y) = (P, Q) = (\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}})$. Man kan kontrollera att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, vilket innebär att fältet är virvelfritt. Det här fältet $\mathbf{B}$ är däremot inte konservativt.

6 Två omformuleringar av Greens sats

Det ska nu göras två olika omformuleringar av Greens sats för att göra övergången till $\mathbb{R}^3$.

6.1 Första omformuleringen

Definition: Låt $D \subset \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -fält. Då definieras rotationen av $\mathbf{F}$ enligt

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Fältet $\mathbf{F}$ sägs vara virvelfritt om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Minns nu Greens sats från (11) och tänker oss att $\mathbb{R}^2$ är ” xy -planet i $\mathbb{R}^3$ ”. Alltså att $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$ och $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0) = (dx, dy, dz)$. Då är

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \hat{k}. \quad (27)$$

Högerledet i Greens sats kan skrivas som

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{k} \, dx \, dy = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} \, dS \quad (28)$$

där $dS = dx \, dy$ och är ett areaelement i xy -planet, och $\hat{N} = \hat{k}$ vilket är en enhetsnormal till xy -planet. Greens sats blir då

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} \, dS \quad (29)$$

och det går att visa att detta gäller för vilken yta som helst i $\mathbb{R}^3$ som har en väldefinierad rand med positiv orientering.

6.2 Andra omformuleringen

Definition: Låt $D \subset \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^1 -vektorfält. Då är divergensen av $\mathbf{F}$ skalärfältet som ges av

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (30)$$

Minns återigen Greens sats i (11) och sätt $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$ och $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0) = (dx, dy, dz)$. Sätt även $\mathbf{G} = (Q, -P, 0)$. Följande omskrivning kan då göras:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{G}. \quad (31)$$

Nu kan högerledet i Greens sats skrivas som

$$\iint_D (\nabla \cdot \mathbf{G}) \, dx \, dy = \iint_D (\nabla \cdot \mathbf{G}) \, dx \, dy \left(\int_0^1 dz \right) = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbf{G}) \, dx \, dy \, dz \quad (32)$$

där D^* är en cylinder med vertikal axel, tvärsnitt D och höjd 1.

Även vänsterledet i Greens sats kan skrivas som enligt följande:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx + Q dy &= \oint_{\partial D} -G_2 dx + G_1 dy + 0 dz = \\ \oint_{\partial D} (G_1, G_2, 0) \cdot (dy, -dx, 0) &= \oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot \hat{N} dr. \end{aligned} \quad (33)$$

$\hat{N}$ är en enhetsnormal som pekar ut från D . Vi kan nu lägga till en faktor $(\int_0^1 dz) = 1$ och skriva om uttrycket ovan som

$$\oiint_{\partial D^*} \mathbf{G} \cdot \hat{N} dS \quad (34)$$

där dS är areaelementet för D^* och $\hat{N}$ pekar ut från D^* . Det räcker dock att analysera den runda delen av D^* eftersom för botten och toppen är $\hat{N} = (0, 0, 1)$ respektive $\hat{N} = (0, 0, -1)$ vilket ger $\mathbf{G} \cdot \hat{N} = 0$. Slutligen kan Greens sats skrivas om som

$$\oiint_{\partial D^*} \mathbf{G} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbf{G}) dV \quad (35)$$