

Sammanfattningar av föreläsningar

MVE035/MVE600 LV4-5

Oliver Duphorn Tony Gromer
Erik Hasselwander Måns Lillsäter Erik Setterstål

Februari 2021

1 Multipelintegraler

1.1 Trippelintegraler

Mycket av teorin för dubbelintegraler går att applicera på trippelintegraler. Dock är trippelintegraler mer abstrakta när det kommer till visualisering av dem, till skillnad från dubbelintegraler som representerade volymen mellan ett område i xy -planet och en funktionsyta.

En trippelintegral betecknas normalt sätt på följande vis,

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \quad (1)$$

där D är ett tredimensionellt område i rummet $\mathbb{R}^3$. Notera att funktionen f beror på tre variabler, vilka alla ska integreras på.

1.1.1 Itererad integration

Itererad integration är även för trippelintegraler en mycket användbar lösningsmetod. För trippelintegraler finns dock två olika sätt vi kan dela upp den på:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_E \left(\int_{z=\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy \quad (2)$$

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x=a}^b \left(\iint_E f(x, y, z) \, dy \, dz \right) \, dx \quad (3)$$

Självfallet går det att byta byta plats på variablerna x, y , och z .

1.1.2 Variabelsubstitution

Variabelsubstitution är en annan metod som går att applicera på trippenintegraler. Generellt skrivs substitutionen på följande vis,

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_E f(g_1(u), g_2(v), g_3(w)) |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw \quad (4)$$

där funktionaldeterminanten J beräknas som,

$$J(u, v, w) = \frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)}. \quad (5)$$

En substitution som ofta förekommer är övergången till rymdpolära koordinater,

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (6)$$

där $J(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Viktigt att tillägga är att variablerna kan vara mer begränsade beroende på integrationsområdet, men de kan aldrig trotsa villkoren ovan.

1.1.3 Nivåkurvor

Nivåkurvor är ytterligare en metod som också går att applicera på trippelintegraler.

$$\iiint_D h(g(x, y, z)) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b h(u) V'(u) \, du \quad (7)$$

där $V(u)$ är volymen av området $G_u = \{(x, y, z); (x, y, z) \in D \text{ och } g(x, y, z) \leq u\}$.

1.1.4 Generaliserade trippelintegraler

Ibland kan man vilja integrera begränsade funktioner över ett obegränsat område i $\mathbb{R}^3$ -planet eller obegränsade funktioner över ett begränsat område i $\mathbb{R}^3$ -planet. Antingen finner man då, precis som i det två- och endimensionella fallet, att integralen konvergerar mot ett visst värde eller att den divergerar.

Exempel: Beräkna $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-r}}{r} \, dx \, dy \, dz$ där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Lösning: Byt till sfäriska (rymdpolära) koordinater. Integrationsområdet är hela $\mathbb{R}^3$ och vi kan därför använda de generella gränserna för sfäriska koordinater som nämndes i avsnitt 1.1.2, det vill säga

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r}}{r} \cdot r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi. \quad (8)$$

Enkel envariabelsanalys ger alltså att integralen konvergerar mot 4π .

1.2 Integraler i $\mathbb{R}^n$

Integraler av större grad än 3 brukar vanligen betecknas som,

$$\int_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (9)$$

där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Volymen $\mu(D)$ av ett kvadrerbart område D i $\mathbb{R}^n$ definieras som,

$$\mu(D) = \int_D 1 \, d\mathbf{x}. \quad (10)$$

2 Volymberäkningar

Precis som att enkelintegraler kan användas för att beräkna areor och dubbelintegraler för att beräkna tredimensionella volymer, kan trippelintegraler användas för att beräkna fyrdimensionella volymer. Dock, som ovan nämnt, kan trippelintegraler även användas för att beräkna en tredimensionell volym. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en kompakt mängd. Genom att sätta integranden till 1, kan volymen av D beräknas med hjälp av en trippelintegral,

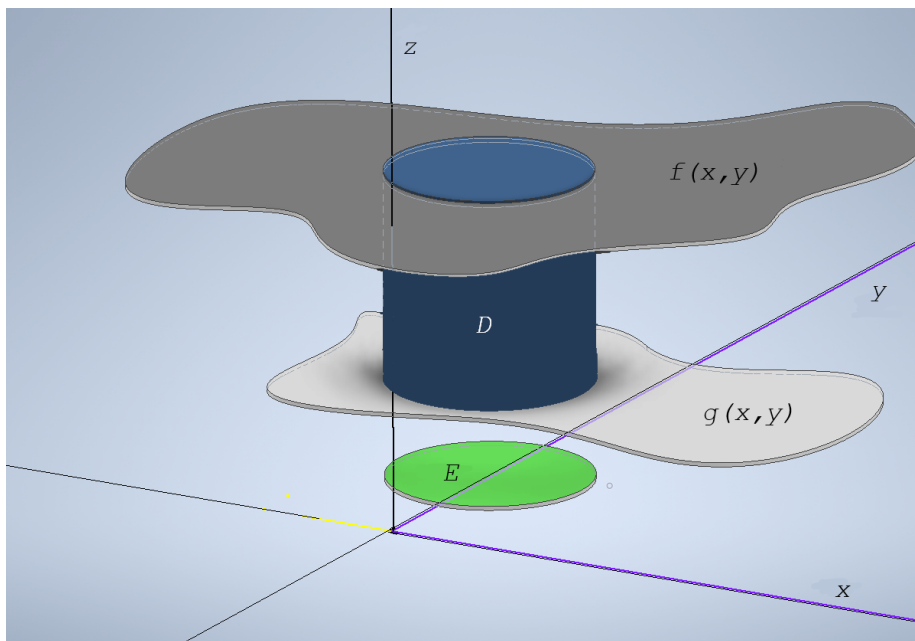
$$\text{Vol}(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz. \quad (11)$$

Här kan då integranden 1 tolkas som höjden av en fyrdimensionell volym och $dx \, dy \, dz$ som en infinitesimal volym i tre dimensioner. Detta kommer då innebära att volymen av kroppen i fyra dimensioner kommer vara lika med volymen av kroppen i tre dimensioner.

2.1 Volymberäkning mellan funktionsytor

En annan situation kan vara att området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ligger mellan två funktionsytor. Här är $f(x, y)$ och $g(x, y)$ kontinuerliga funktioner. E är projektionen av D på xy -planet som en kompakt mängd så att $(x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2$ och

$$D = \{(x, y, z) | g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}. \quad (12)$$



Figur 1: En volym D som ligger mellan funktionsytorna f och g samt projektionen av D på xy -planet, här kallad E .

Då kan volymen av D skrivas som en trippelintegral som i sin tur kan skrivas om till en dubbelintegral med hjälp av Fubinis sats,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iint_E \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz \right) dx \, dy = \iint_E (g(x,y) - f(x,y)) dx \, dy. \end{aligned} \quad (13)$$

3 Mekaniktillämpningar

Inom mekaniken finns ett antal användningsområden för trippelintegraler. Detta avsnitt behandlar beräkning av massa och beräkning av masscentrum.

3.1 Massa

För föremål med varierande densitet, kan dess massa räknas ut med hjälp av en trippelintegral.

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt, kvadrerbart område, och låt $\rho(x, y, z)$ vara funk-

tionen för kroppens densitet. Då ges massan M av

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (14)$$

3.2 Masscentrum

Masscentrum för föremål med varierande densitet kan beräknas som medelvärdet utav massan över kroppen.

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt, kvadrerbart område, och låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Medelvärde r_T av f i D ges av

$$r_T = \frac{1}{\text{vol}(D)} \iiint_D f \, dx \, dy \, dz \quad (15)$$

Då masscentrum är medelvärde av massans position i kroppen, går det beräkna masscentrum $\vec{m}$, där

$$\vec{m} = (m_x, m_y, m_z), \quad (16)$$

där m_x ges av

$$m_x = \frac{\iiint_D x \rho \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D \rho \, dx \, dy \, dz}. \quad (17)$$

På samma sätt går det även att ta fram m_y, m_z .

4 Kurvor

Integraler går även att använda vid beräkning av kurvors längd. I detta avsnitt definieras kurvor och deras egenskaper samt metoder för beräkning av kurvlängd.

4.1 Definition av en parametriserad och orienterad $\mathcal{C}^k$ -kurva i $\mathbb{R}^n$

Låt $a \leq b$ vara reella tal och $k \geq 0, n \geq 1$ vara heltal. En $\mathcal{C}^k$ -funktion

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (18)$$

kallas för en parametriserad och orienterad $\mathcal{C}^k$ -kurva i $\mathbb{R}^n$.

Punkten $\mathbf{r}(a)$ kallas för kurvans startpunkt och punkten $\mathbf{r}(b)$ kallas för kurvans slutpunkt. En kurva sägs vara sluten om startpunkten = slutpunkten, dvs $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. En kurva sägs vara enkel om $a \leq t_1 < t_2 < b \implies \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$.

Att en kurva är orienterad innebär att den går från a till b . Parametrisering kan ses som en beskrivning av en partikels rörelse över tid från en startpunkt $A = \mathbf{r}(a)$ vid $t = a$ till en slutpunkt $B = \mathbf{r}(b)$ vid $t = b$.

4.2 Orienterings- och parametriseringsbyte

Orienteringsbyte innebär att $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ersätts med $\mathbf{s} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där

$$\begin{cases} \mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(b + a - t), \\ \mathbf{s}(a) = b, \\ \mathbf{s}(b) = a, \end{cases} \quad (19)$$

vilket resulterar i att kurvan byter orientering, slutpunkten blir startpunkt och vice versa. Vid orienteringsbyte bibehålls farten i varje punkt på kurvan.

Vid ett parametriseringsbyte ersätts $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ med $\mathbf{s} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där det finns en bijektiv funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ så att

- (i) $\varphi(a) = c$ och $\varphi(b) = d$,
- (ii) φ är växande, dvs $t_1 \leq t_2 \implies \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$ och
- (iii) $\mathbf{s}(\varphi(t)) = \mathbf{r}(t) \forall t \in [a, b]$.

I allmänhet bibehålls inte fart, hastighet eller acceleration vid ett parametriseringsbyte.

4.3 Hastighet, fart och acceleration

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en parametriserad och orienterad $\mathcal{C}^1$ -kurva. För $t \in [a, b]$ definieras hastigheten vid tidpunkten t som $\mathbf{r}'(t)$. På samma sätt definieras accelerationen vid tidpunkten t som $\mathbf{r}''(t)$ för en $\mathcal{C}^2$ -kurva.

4.4 Kurvlängd för en $\mathcal{C}^1$ -kurva

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en parametriserad och orienterad $\mathcal{C}^1$ -kurva. Kurvans längd under en infinitesimal tid $[t, t + dt]$ kan uppskattas till $\|\mathbf{r}'(t)\| dt$. Detta medför att kurvans totala längd L blir

$$L = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (20)$$

Längden av en $\mathcal{C}^1$ -kurva är väldefinierad, dvs oberoende av parametrisering. Beviset av detta är som följande: Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{s} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara två olika parametriseringar av samma $\mathcal{C}^1$ -kurva. Kurvlängden L^* kan då skrivas som

$$L^* = \int_c^d \|\mathbf{s}'(u)\| du. \quad (21)$$

Parametriseringen $u = \varphi(t)$ medför att $du = \varphi'(t) dt$. Detta ger att

$$L^* = \int_a^b \|\mathbf{s}'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt. \quad (22)$$

Vi låter $u = \varphi(t)$ och får då att

$$\mathbf{s}'(u) = \frac{d}{du} \mathbf{s}(u). \quad (23)$$

Betraktas $\mathbf{s}(\varphi(t))$ som en sammansatt funktion av t ger kedjeregeln

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}(\varphi(t)) = \mathbf{s}'(\varphi(t)) \varphi'(t) \quad (24)$$

vilket i sin tur ger att

$$\begin{aligned} L^* &= \int_a^b \left\| \frac{(d/dt) \mathbf{s}(\varphi(t))}{\varphi'(t)} \right\| \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b \|(d/dt) \mathbf{s}(\varphi(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = L \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

4.5 Kurva som hör till funktionsgraf

Vid specialfallet av en kurva som hör till en funktionsgraf $f(x)$ följer den naturliga parametriseringen $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$, $a \leq x \leq b$ där a, b är kurvans start respektive slutpunkt. Om $f \in C^1$ gäller det att

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(x) &= (1, f'(x)) \implies \\ \|\mathbf{r}'(x)\| &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} \implies \\ L &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \end{aligned}$$

4.6 Arbetsintegralen

Låt $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ vara två C^1 -kurvor i $\mathbb{R}^n$. Då gäller att

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \quad (25)$$

Med hjälp av detta resultat kan man härleda den så kallade arbetsintegralen. Dess värde kallas för arbetet uträttat av vektorfältet $\mathbf{F}$ längs med en kurva $\mathbf{r}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{\text{slut}}^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{start}}^2 &= \frac{1}{2} m \|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\mathbf{r}'(a)\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt = \int_a^b (m \cdot \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt, \end{aligned} \quad (26)$$

där $\mathbf{F}$ är kraftfältet.

5 Area av parametriserad yta

Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en kompakt och kvadrerbar mängd, samt att $k \geq 0$ och $n \geq 2$ där $\{n, k\} \subset \mathbb{Z}$ kallas en $\mathcal{C}^k$ -funktion

$$\mathbf{r}: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

för en parametriserad $\mathcal{C}^k$ -yta. Följande avsnitt kommer att behandla areaberäkningar av sådana ytor i fallet $n = 3$, det vill säga i rummet. Låt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t), \quad (s, t) \in D$$

och betrakta en axelparallell rektangel i D med hörn i punkterna (s, t) , $(s+ds, t)$, $(s, t+dt)$ och $(s+ds, t+dt)$. I och med att avståndet mellan punkterna är infinitesimalt är även rektangeln infinitesimal. Rektangeln avbildas genom $\mathbf{r}$ på en infinitesimal parallelogram med hörn i punkterna $\mathbf{r}(s, t)$, $\mathbf{r}(s+ds, t)$, $\mathbf{r}(s, t+dt)$ och $\mathbf{r}(s+ds, t+dt)$. Denna parallelogram kan sägas spännas upp av vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$, vilka kan erhållas som

$$\vec{u} = \mathbf{r}(s+ds, t) - \mathbf{r}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s, t)ds$$

och

$$\vec{v} = \mathbf{r}(s, t+dt) - \mathbf{r}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s, t)dt.$$

Ur detta kan ett areaelement dS bestämmas som

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

Den totala ytarean S bör alltså fås genom integration av areaelementen över D , alltså är

$$S = \iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt. \quad (27)$$

Det finns två stycken specialfall av 27 som är särskilt användbara. Det första fallet är när ytan är del av en funktionsgraf:

$$\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}.$$

En sådan yta parametriseras lämpligen genom

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

och det gäller då att arean

$$S = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy. \quad (28)$$

Det andra specialfallet av 27 gäller när Y är en nivåyta till en funktion av tre variabler så att

$$Y = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = C, (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}.$$

Antag vidare att F_z är nollskild på hela ytan. Då gäller det att arean

$$S = \iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} dx dy. \quad (29)$$