

Flervariabelanalys Rapport LV6

Max Green, Emma Hällbacka, Erik Johansson
Victor Wellsmo, Hedvig Wennberg

Februari 2021

1 Kurvintegraler

Definition av kurvintegraler

Låt $n \in \mathbb{N}$, låt $\mathbb{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett C^0 -vektorfält och låt $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en parametriserad och orienterad C^1 -kurva. Då definieras kurvintegralen av $\mathbb{F}$ längs kurvan enligt:

$$\int_a^b \mathbb{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (1)$$

Proposition

- i) Kurvintegralen är oberoende av parametrisering, det vill säga beror endast på själva banan och inte hur den genomlöps
- ii) Däremot så byter integralen tecken då kurvan byter orientering

Jordan Curve Theorem

Låt γ vara en enkel och sluten C^0 -kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter. Dessa komponenter kallas för kurvans insida och utsida. Insidan är en begränsad mängd, medan utsidan är obegränsad.

Definition av positiv/negativ orientering

Låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. γ sägs vara positivt orienterad om insidan av γ ligger till vänster om färdriktningen och negativt orienterad om insidan ligger till höger om färdriktningen.

Direkt beräkning av kurvintegraler

Hitta en C^1 -parametrisering för kurvan, $\vec{r}(t)$, och beräkna sedan den definitiva integralen:

$$\int_a^b \mathbb{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt \quad (2)$$

2 Konservativt och Virvelfritt

Definition av konservativt fält

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och låt $\mathbb{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett vektorfält. $\mathbb{F}$ sägs vara konservativt/ ett potentialfält om det finns ett skalärfält $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ så att $\nabla\phi = \mathbb{F}$. ϕ kallar för en potential till $\mathbb{F}$.

Sats 9.4.2

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän, låt $\mathbb{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett konservativt C^0 -fält och låt γ vara en C^1 -kurva i D med startpunkt $\vec{a}$ och slutpunkt $\vec{b}$. Då gäller:

$$\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) \quad (3)$$

där $\nabla\phi = \mathbb{F}$.

Korollarier av Sats 9.4.2

i) Om $\mathbb{F}$ är konservativt så är kurvintegraler oberoende av väg, det vill säga värdet beror endast på var kurvan startar och slutar.

ii) $\oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva γ i D .

Bevis av Sats 9.4.2

Välj en parametrisering av kurvan $\gamma = \{\vec{r}(t) \mid a \leq t \leq b\}$, där $\vec{r} \in C^1$

Vi kan då skriva kurvintegralen:

$$\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \mathbb{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt \quad (4)$$

Anta att $\mathbb{F}$ är konservativt. Då kan vi skriva

$$\int_a^b \mathbb{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = \int_a^b \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt \quad (5)$$

Med hjälp av kedjeregeln kan vi skriva om detta på följande vis

$$\int_a^b \nabla\phi(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\vec{r}(t)) dt \quad (6)$$

Då får vi enligt integralkalkylens fundamentalsats

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\vec{r}(t)) dt = \phi(\vec{r}(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a)) = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) \quad (7)$$

v.s.v

Sats 9.4.3

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och $\mathbb{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett C^0 -vektorfält. Om kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\vec{r}$ är oberoende av vägen (ekvivalent, om $\oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje sluten kurva γ i D), då är $\mathbb{F}$ konservativt.

Definition av virvelfritt fält

Låt $\mathbb{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$ vara ett C^1 -vektorfält i $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{F}$ sägs vara virvelfritt om:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (8)$$

Definition av enkelt sammanhängande mängd

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^2$ sägs vara enkelt sammanhängande om:

- i) M är bågvisst sammanhängande
- ii) Insidan till varje enkel och sluten kurva i M helt tillhör M

Sats 9.4.4

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän och $\mathbb{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett C^1 -vektorfält. Då gäller:

$\mathbb{F}$ är konservativt $\implies \mathbb{F}$ är virvelfritt

Sats 9.4.5

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en enkelt sammanhängande domän, och $\mathbb{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett C^1 -vektorfält. Då gäller:

$\mathbb{F}$ är virvelfritt $\implies \mathbb{F}$ är konservativt

Bevis

Förutsatt att $\mathbb{F}$ är virvelfritt så räcker det enligt Sats 9.4.3 att visa att $\oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\vec{r} = 0$ för varje enkel, sluten och styckvis C^1 -kurva, γ , i D . Enligt Jordans Sats så har γ en väldefinierad insida som tillhör D , eftersom D är enkelt sammanhängande. Då kan Greens Sats användas:

$$\oint_{\gamma} \mathbb{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\gamma \text{ insida}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (9)$$

v.s.v.

3 Greens Sats

Greens Sats (Sats 9.2.1)

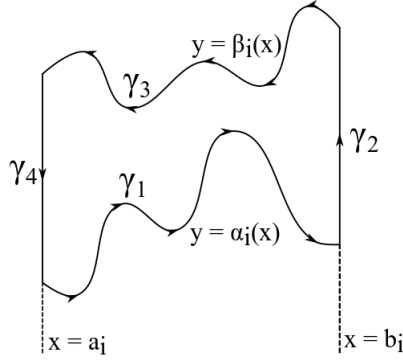
Låt P och Q vara två C^1 -funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis C^1 -kurvor och som är positivt orienterad så är:

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (10)$$

Bevis för reguljära områden

För att genomföra beviset behövs först definitionen för reguljära områden.

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd. D sägs vara reguljärt i x -led om D kan delas upp i ändligt många delar så att varje del har formen $D_i = \{(x, y) \mid a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$ där $\alpha_i(x)$ och $\beta_i(x)$ är C^1 -funktioner av x och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x)$ då $x \in [a_i, b_i]$.



Figur 1: Ett reguljärt område i x-led

Reguljärt i y -led definieras analogt. D sägs vara reguljärt om D är reguljärt i både x -led och y -led.

Steg 1: Låt $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ där $D_i = \{(x, y) \mid a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$. Randen av D definieras som $\partial D_i = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

Först måste det visas att för varje $i = 1, \dots, n$ gäller:

$$\oint_{\partial D_i} P dx = - \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (11)$$

För högerledet kan Fubinis Sats användas:

$$- \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_{a_i}^{b_i} P(x, \alpha_i(x)) dx - \int_{a_i}^{b_i} P(x, \beta_i(x)) dx = \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_3} P dx \quad (12)$$

Men $\int_{\gamma_2} P dx = \int_{\gamma_4} P dx = 0$ eftersom både γ_2 och γ_4 är vertikala (se Figur 1). Det har därmed visats att:

$$- \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D_i} P dx \quad (13)$$

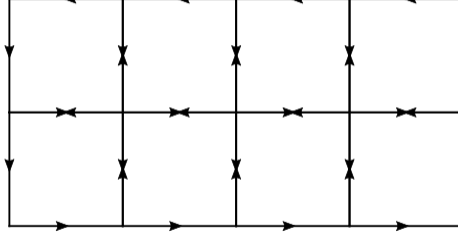
Summera sedan över alla delområden:

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = \sum_{i=1}^n - \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (14)$$

För högerledet beräknar man samma dubbelintegral över varje D_i och adderar. Resultatet blir $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$.

Det måste nu visas att $\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = \oint_{\partial D} P dx$. Detta görs lättast med ett bildbevis:

Låt varje ruta beskriva ett delområde D_i till rektangeln D . Randen till varje område har en positiv orientering, vilket resulterar i att kurvintegralerna längs de inre sidorna tar ut varandra. Det enda som återstår är då randen till D , vilket var vad som skulle visas.



Figur 2: Bildbevis för att de inre kurvintegralerna tar ut varandra

Steg 2: Med analogt resonemang kan vi visa att om D är reguljärt i y -led så gäller:

$$\oint_{\partial D} Q \, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy \quad (15)$$

Steg 3: Om D är reguljärt så kan Steg 1 och Steg 2 adderas:

$$\oint_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy \quad (16)$$

v.s.v.

4 Greens sats i $\mathbb{R}^3$

Definition av Rotationen

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbb{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -fält. Då definieras rotationen av $\mathbb{F}$ enligt:

$$\text{rot}(\mathbb{F}) = \text{curl}(\mathbb{F}) = \nabla \times \mathbb{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (17)$$

Definition av Divergens

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\mathbb{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -fält. Divergensen av $\mathbb{F}$ är skalärfältet som ges av:

$$\text{div}(\mathbb{F}) = \nabla \cdot \mathbb{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (18)$$

Första omformuleringen av Greens Sats

Låt D vara en del av xy -planet i $\mathbb{R}^3$. Låt även z -koordinaten hos $\mathbb{F}$ vara 0. Rotationen av $\mathbb{F}$ ger då:

$$\nabla \times \mathbb{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \hat{k} \implies (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{k} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \quad (19)$$

där $\hat{k}$ kan skrivas som $\hat{N}$, där $\hat{N}$ är en normal till xy -planet, vilket inkluderar D . Greens Sats kan därmed skrivas om som:

$$\oint_{\partial D} \mathbb{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \hat{N} dS \quad (20)$$

där $dS = dxdy$ är areaelementet i xy -planet.

Detta gäller för en yta i $\mathbb{R}^3$ som ligger i xy -planet. Stokes Sats visar att detta gäller för vilken som helst C^1 -yta i $\mathbb{R}^3$ med en väldefinierad rand med väldefinierad positiv orientering.

Andra omformuleringen av Greens Sats

Skapa ett nytt fält $\mathbb{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ så att $(G_1, G_2, 0) = (F_2, -F_1, 0)$. Högerledet i Greens Sats kan då skrivas som:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbb{G} \quad (21)$$

Låt nu D^* vara en cylinder med tvärsnitt D och höjd 1 med vertikal axel.

$$\iint_D (\nabla \cdot \mathbb{G}) dx dy \cdot \int_0^1 dz = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbb{G}) dx dy dz \quad (22)$$

Fokusera nu på vänsterledet i Greens Sats:

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \oint_{\partial D} -G_2 dx + G_1 dy + 0 dz = \oint_{\partial D} \mathbb{G} \cdot (dy, -dx, 0) = \oint_{\partial D} \mathbb{G} \cdot \hat{N} dr \quad (23)$$

där $\hat{N}$ är normalvektorn som pekar ut från D .

$$\implies \oint_{\partial D} \mathbb{G} \cdot \hat{N} dr = \oiint_{(\partial D^*)_s} \mathbb{G} \cdot \hat{N} dS = \oiint_{\partial D^*} \mathbb{G} \cdot \hat{N} dS \quad (24)$$

där $(\partial D^*)_s$ är den runda delen av ∂D^* och $\hat{N}$ är normalvektorn som alltid pekar ut från cylindern D^* . Däremot har cylindern D^* även en "topp" där $\hat{N} = (0, 0, 1)$ och en "botten" där $\hat{N} = (0, 0, -1)$, men $\mathbb{G} \cdot \hat{N} = 0$ i dessa fall. Då fås det slutgiltiga uttrycket där ∂D^* är hela randen till D^* . Greens Sats kan därmed skrivas om som:

$$\oiint_{\partial D^*} \mathbb{G} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbb{G}) dV \quad (25)$$

där dV är volymelementet.

Detta gäller för en cylinder med vertikal axel och ett fält i xy -planet. Gauss Divergens Sats säger att samma likhet gäller för vilket inneslutet område i $\mathbb{R}^3$ som helst, så länge $\hat{N}$ alltid pekar ut från området.

5 Flödesintegraler

Definition av flödesintegraler

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $Y \subseteq \Omega$ vara en sluten och styckvis C^1 -yta och $\mathbb{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett C^0 -fält. Då definieras flödet av $\mathbb{F}$ ut genom Y av:

$$\oiint_Y \mathbb{F} \cdot \hat{N} \, dS \quad (26)$$

där $\hat{N}$ är en enhetsnormal som pekar ut från Y .