Sammanfattning läsvecka 5

Cecilia Erneman, Hampus Hansen, Simon Järdnäs,
Erik Karlsson Öhman, Stina Persson, Emmy Winqvist

2021-02-26

1 Teorin bakom dubbelintegraler

1.1 Definitioner

1.1.1 Def 1

Låt $D_1, D_2 \subseteq \mathbf{R}$ med $D_1 \subseteq D_2$. Låt $f : D_1 \to \mathbf{R}$. Nollutvidgningen av f till D_2 är funktionen $f_{D2} : D_2 \to \mathbf{R}$ som ges av $f_{D2}(\overrightarrow{x}) =$

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{x}),\ \textit{då}\, \overrightarrow{x} \in D_1 \\ 0,\ \textit{då}\, \overrightarrow{x} \in D_2 \backslash D_1. \end{cases}$$

1.1.2 Def 2

Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$ vara kompakt mängd. $f : D \to \mathbf{R}^2$ integrerbar över D. Om det finns axellparallel rektangel $D \subseteq \Delta$ sådant att f_Δ är integrerbar över D gäller: $+ \int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_\Delta f_\Delta(x,y)\,dx\,dy$.

1.1.3 Def 3

En mängd $M \subseteq \mathbf{R}^2$ kallas för en nollmängd om det för varje $\epsilon > 0$ finns ändligt många axelparallella rektanglar $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ sådant att
(1):$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$
(2) $\sum_{i=1}^{n} area(\Delta_i) < \epsilon$.

1.1.4 Def 4

En kompakt mängd $D \subseteq \mathbf{R}^2$ sägs vara kvadrerbar om dess rand δD är en nollmängd.

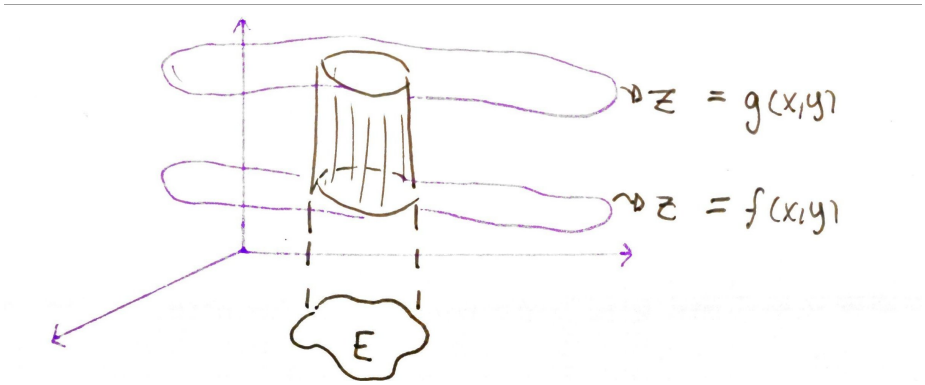
1.2 Lemma 2

Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$ vara en kompakt mängd. Om D är kvadrerbar så är varje kontinuerlig funktion $f : D \to \mathbf{R}$ integrerbar över D. Om D är reguljärt gäller Fubinis sats.

2 Volymberäkningar med hjälp av trippelintegraler

Låt $D \subseteq \mathbf{R}^3$ vara en kompakt mängd. Då gäller att $\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D 1\, dx\, dy\, dz$.

Ofta ligger D mellan två funktionsgrafer (se Figur 1).



Figur 1: *Den markerade volymen representerar mängden D.*

Där $f(x, y)$ och $g(x, y)$ är kontinuerliga, $x, y \in E \subseteq \mathbf{R}^2$ samt att $f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$.

Man kan då beräkna volymen på följande sätt:

$$\mathrm{Vol}(D) = \iint_E dx\, dy \left(\int_{z=f(x,y)}^{g(x,y)} dz\right). \tag{1}$$

3 Enhetstetraeder med n dimensioner

Tetraeder betecknas T_u. Enhetstetraedern brukar betecknas $T_{1,n}$ där n är antalet dimensioner den består av och ges av

$$T_{1,n} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots n \text{ och } x_1, \ldots x_n \leq 1\} \tag{2}$$

Volymen av denna fås av $\frac{1}{n!}$.

4 Cylindriska och sfäriska koordinater

Det cylindriska koordinatsystemet är en tredimensionell utvidgning av det polära koordinatsystemet. Således är $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ och $z = z$. Vid koordinatbyte från kartesiska koordinater fås sambandet:

$$dx\,dy\,dz = r\,d\theta\,dr\,dz \tag{3}$$

Detta erhålls ur funktionaldeterminanten för sambandet mellan polära och kartesiska koordinater i planet.

En position i rummet kan även beskrivas med sfäriska koordinater. I det sfäriska koordinatsystem är $x = \rho\sin(\theta)\cos(\phi)$, $y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi)$ och $z = \rho\cos(\theta)$. Här är ρ sträckan från en punkt till origo, θ minsta vinkeln mellan z-axlen och ρ, och ϕ minsta vinkeln mellan x-axeln och projektionen av ρ i xy-planet.Vid koordinatbyte från kartesiska koordinater fås sambandet:

$$dx\,dy\,dz = \rho^2\sin(\theta)\,d\rho\,d\theta\,d\phi \tag{4}$$

Detta erhålls ur funktionaldeterminanten för sambandet mellan sfäriska och kartesiska koordinater i rummet.

5 Tillämpningar av trippelintegraler

Då ett förmål ockuperar ett kompakt, kvadrerbart område, D, i rummet ges dess massa av:

$$\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{5}$$

ρ betecknar en funktion för föremålets densitet.

Medelvärdet av en integrerbar funktion, f, på ett kompakt, kvadrerbart område, D, i rummet ges av:

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(D)}\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{6}$$

Ett föremåls masscentrum defineras som medelvärdet av dess massas position. Detta kan uttryckas som en kombination av ekvation (5) och (6):

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(D)}\iiint_D (x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \tag{7}$$

6 Notation för multipelintegraler

En integral av en funktion av ett godtyckligt antal variabler kan skrivas som:

$$\iint ... \int f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n = \int f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{8}$$

Här är det implicerat att integraltecknet framför uttrycket på vektorform är av motsvarande n-dimension.

7 Sats om enhetsklotets volym i n-dimensioner

Det n-dimensionella enhetsklotets (klotets radie ≤ 1) betecknas som B_n.

$$\mathrm{Vol}(B_n) = \mu_n \tag{9}$$

μ_n ges av en rekursionsformel:

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = \pi, \quad \mu_n = \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2} \qquad \forall \quad n \geq 3 \tag{10}$$

8 Orienterad och parametriserad C^k-kurva i $\mathbf{R}^n$

8.1 Definition av orienterad och parametriserad C^k-kurva i $\mathbf{R}^n$

Låt $a \leq b$ vara reella tal, $k \geq 0$, $n \geq 1$ vara naturliga tal. En C^k-funktion $\vec{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ kallas en orienterad och parametriserad C^k-kurva i $\mathbf{R}^n$. Punkten $\vec{r}(a)$ kallas för en startpunkt och punkten $\vec{r}(b)$ kallas för en slutpunkt. En kurva sägs vara sluten om $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Den kallas enkel om $a \leq t_1 < t_2 < b \implies \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$.

8.2 Orientering och parametrisering

Kurvan beskriver en partikels rörelse från sin startpunkt till dess slutpunkt, där parametriseringen beskriver hur partikeln går längs denna kurva. Intuitivt kan man betrakta det som att parametriseringen beskriver med vilken takt partikeln går från $\vec{r}(a)$ till $\vec{r}(b)$. Orienteringen beskriver vilket håll partikeln färdas genom kurvan.

8.2.1 Orienteringsbyte

Ersätt $\vec{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ med $\vec{s} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ där

$$\begin{cases} \vec{s}(t) = \vec{r}(a + b - t), \\ \implies \vec{s}(a) = \vec{r}(b),\ \vec{s}(b) = \vec{r}(a), \end{cases} \tag{11}$$

alltså är kurvans orientering åt motsatt håll, där den gamla startpunkten $vecr(a)$ är den nya slutpunkten och vise versa för $vecr(b)$. Intuitvt går nu partikeln bbaklänges"igenom kurvan.

8.2.2 Parametriseringsbyte

Ersätt $\vec{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ med $\vec{s} : [c, d] \to \mathbf{R}^n$ där det finns en bijektiv C^k-funktion $\phi : [a, b] \to [c, d]$ sådan att

(i) $\phi(a) = c,\ \phi(b) = d$

(ii) $a \leq t_1 < t_2 < b \implies \phi(t_1) \leq \phi(t_2)$

(iii) $\vec{s}(\phi(t)) = \vec{r}(t) \quad \forall\, t \,\epsilon\, [a, b]$.

Här medför (i) att vi bytt start- och slutpunkt till c respektive d, (ii) att ϕ är en växande funktion och slutligen (iii) att vi följer samma kurva.

8.2.3 Hastighet, fart och acceleration

Då en orienterad och parametriserad C^k-kurva i $\mathbf{R}^n$ verkar intuitivt beskriva en hur en partikel rör sig igenom en kurva är det inte förvånande att en mycket relevant tillämpning på detta är hastighet, fart och acceleration hos en partikel som rör sig genom en sådan godtycklig kurva, $\vec{r} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$. Därmed definierar vi hastigheten som $\vec{r}\,'(t)\ \forall\, t \,\epsilon\, [a, b]$, där $\vec{r}\,'(t)$ är en framåtriktad tangent vektor som består av derivatan av varje komponent av $\vec{r}$ med avseende på tiden. Detta kräver alltså att $\vec{r}$ är en gånger deriverbar, alltså att $\vec{r}$ är en C^1-kurva. Således definieras fart som storleken på hastigheten, alltså $||\vec{r}\,'(t)||$.
Accelerationen definieras som andraderivatan av en $\vec{r}$ är en C^2-kurva och skrivs därmed som $\vec{r}\,''(t)$.

9 Kurvlängd av en parametriserad och orienterad C^1-kurva

Kurvlängden L för en parametriserad och orienterad C^1-kurva från startprunkt $\vec{r}(a)$ till slutpunkt $\vec{r}(b)$ kan skrivas

$$L = \int_a^b ds \tag{12}$$

där ds är den infinitesimala kurvlängden en partikel flyttas under infintesimal tid dt. Den infinitesimala kurvlängden kan även skrivas

$$ds = \frac{d}{dt}\ ||\vec{r}(t)||\ dt. \tag{13}$$

Således kan den totala kurvlängden L skrivas

$$L = \int_a^b \frac{d}{dt}\ ||\vec{r}(t)||\ dt \tag{14}$$

En proposition från detta är att längden av en parametriserad och orienterad C^1-kurva är väldefinierad, det vill säga att kurvans längd är oberoende av dess parametrisering.

Bevisidéen för detta är att titta på två olika parametriseringar av samma C^1-kurva, exempelvis $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ och $\vec{s}\colon [c,d] \to \mathbf{R}^n$. Då fås att

$$L^* = \int_c^d \frac{d}{ds} \ ||\vec{s}(s)|| \ ds. \tag{15}$$

Genom variabelsubstitution kan en sammansattfunktion av t fås med samma integralgränser som (t), det vill säga a och b. Med kedjeregeln fås sedan att $L^* = L$.

Ett benämningsvärt specialfall för kurvlängd är för en kurva som tillhör en funktionsgraf. Den naturliga parametriseringen för kurvan är $\vec{r}(x) = (x, f(x))$, där x ligger i ett intervall $[a,b]$. Kurvlängden L kan då skrivas

$$L = \int_a^b \frac{d}{dx} \ ||\vec{r}(x)|| \ dx. \tag{16}$$

Eftersom kurvan är en parametriserad och orienterad C^1-funktion är det ekvivalent med att f tillhör C^1. Därmed är $\frac{d}{dx} \ ||\vec{r}(x)|| \ = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Således kan fuktionsgrafens kurvlängd skrivas

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \tag{17}$$

10 Skalärprodukt

Låt $\vec{u}(t)$ och $\vec{v}(t)$ vara två stycken parametriserade och orienterade C^1-kurvor, då är en proposition att

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \frac{d}{dt}\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \frac{d}{dt}\vec{v}(t). \tag{18}$$

Bevisidéen för denna proposition är att använda sig av produktregeln.

10.1 Fysikalisk tillämpning

Låt en partikel följa en parametriserad och orienterad C^2-kurva $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$. Förändringen i kinetisk energi skrivs som $\frac{1}{2}m(slutfart)^2 - \frac{1}{2}m(startfart)^2$, vilket är lika med $\frac{1}{2}m(\ ||\vec{r}'(b)|| \ ^2 - \ ||\vec{r}'(a)|| \ ^2)$. Enligt Integralkalkylens fundamentalsats är detta lika med

$$\frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt} \ ||\vec{r}(t)||^2 \ dt. \tag{19}$$

Från definitionen av skalärprodukt fås att $\frac{d}{dt}\ ||\vec{r}(t)||\ ^2 = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$. Enligt propositionen (se Ekvation(9)) är därmed Ekvation (10) lika med

$$\frac{1}{2}m \int_a^b \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)\, dt. \tag{20}$$

Om m multipliceras in i integralen fås genom Newtons andra lag

$$\int_a^b \vec{F}(t) \cdot \vec{r}'(t)\, dt \tag{21}$$

eftersom $massa \cdot acceleration = kraft$. I Ekvation (12) är $\vec{F}(t)$ den sammanlagda kraften som verkar på partikeln. Matematiskt skrivs $\vec{F}(t) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, och $\vec{F}$ kallas för ett vektorfält. Den typ av integral som visas i Ekvation (12) kallas för en kurvintegral eller arbetsintegral och integralens värde kallas för arbetet som uträttats av vektorfältet $\vec{F}$ längs kurvan.

11 Kryssprodukt

Låt $\vec{u}(t)$ och $\vec{v}(t)$ vara två stycken C^1-kurvor i $\mathbf{R}^3$, då är en proposition att

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \frac{d}{dt}\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \frac{d}{dt}\vec{v}(t). \tag{22}$$

Propostitionen är väldefinierad och ger en vektorvärd funktion. Bevisidéen är att visa likeheten för alla tre komponenter av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ samt tillämpa produktregeln.

11.1 Fysikalisk tillämpning

Kryssprodukten kan tillämpas på centralrörelse med hjälp av två definitioner.

Definition 1: En partikel sägs utföra centralrörelse med avseende på en punkt O, om kraften som den upplever alltid är riktad mot O.

Definition 2: En partikels vinkelmomentum med avseende på en punkt O ges av

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{23}$$

där:

$\vec{r}$ = ortsvektorn med avseende på punkten O
$\vec{p}$ = partikelns linjärmomentum.

$\vec{p}$ kan skrivas som mulitplikationen mellan massan m och hastigheten $\vec{v}$, vilket ger vinkelmomentet

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \tag{24}$$

Om en partikel följer en C^1-bana $\vec{r}(t)$ kan vineklmomentet $\vec{L}$ skrivas som en funktion av tid, och funktionens tidsderivata ges av

$$\frac{d}{dt}\vec{L}(t) = m\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \times \vec{r\prime}(t)) \tag{25}$$

där $\vec{v}(t)$ har ersatts med $\vec{r\prime}(t)$. Genom tillämpning av propostionen för kryssprodukt samt Newtons lagar fås att tidsderivatan av vinkelmomentet $\vec{L}(t)$ är noll, vilket innebär att kryssprodukten $\vec{r}(t) \times \vec{r\prime}(t)$ är konstant. Detta leder till två konsekvenser.

Konsekvens 1: Då kryssprodukten är konstant följer det att normalvektorn är konstant. Det följer också att planet som vektorerna spänner upp är konstant och spänner upp samma plan för varje tidsenehet t. Detta leder till att partikeln rör sig i ett plan.

Konsekvens 2: Eftersom partikeln rör sig i ett plan kommer dess bana svepa ut en area kring punkten O. Tidsderivatan av denna arean, $\frac{dA}{dt}$, kommer vara konstant. Detta innebär att partikeln sveper ut en area i planet kring pukten O i konstant takt.

Tillsammans brukar dessa konsekvenser betraktas som Keplers lag.

12 Ytor

Definition: Låt $D \subseteq \mathbf{R}^2$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd. En C^k-funktion $\vec{r} : D \to \mathbf{R}^n$, kallas för en parametriserad C^k-yta där $k \geq 0$ och $n \geq 2$.

Notation: För $n = 3$ skrivs $\vec{r} : D \to \mathbf{R}^3$ och $(s,t) \mapsto \vec{r}(s,t)$ där s och t är parametrar. Punkten (s,t) tillhör definitionsmängden D.

Formel: För ytareor finns tre viktga formler där två av dem är specialfall av den första. Huvudformeln för den totala arean ges av

$$Ytarea_0 = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| dx\, dy. \tag{26}$$

Specialfall 1: I det första specialfallet hör ytan till en funktionsgraf av två variabler. Dess ytarea ges då av

$$Ytarea_1 = \iint_{\pi(Y)} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy. \tag{27}$$

där $\pi(Y)$ är projektionen av ytan Y ner på x-y-planet och uttrycket under rottecknet är normalvektorn till tangentplanet.

Specialfall 2: I sista specialfallet är ytan en nivåyta till en C^1-funktion av tre variabler. Ytarean ges av

$$.Ytarea_2 = \iint_{\pi(Y)} \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}}\, dx\, dy. \tag{28}$$

där divisionerna $\frac{F_x^2}{F_z^2}$ och $\frac{F_y^2}{F_z^2}$ fås genom att anta att $F_z \neq 0$ på hela kurvan samt tillämpning av implicita funtionssatsen. Ekvation 28 kan förenklas till

$$Ytarea_2 = \iint_{\pi(Y)} \left\| \frac{\nabla F}{|F_z|} \right\| dx\, dy. \tag{29}$$