

Sammanfattning av flervariabelanalys

MVE035/MVE600 LV4-LV5

Elina Möller Bjarne Sihlbom Jakob Westerdahl
Sophie You Johan Ödesjö Johanna Örgård

25 februari 2021

1 Teori för dubbelintegraler

Sats: Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en *axelparallell rektangel* och låt $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. Då gäller:

(i) f är integrerbar över Δ .

(ii) Båda itererade enkelintegraler

$$\int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) \text{ och } \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) \quad (1)$$

existerar.

(iii) (Fubinis sats)

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) = \int_a^b dx \left(\int_c^d f(x, y) dy \right). \quad (2)$$

För beviset av (i) behöver begreppet *trappfunktion* definieras, vilket görs enligt följande:

Definition: Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel. Funktionen $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara en trappfunktion om det finns partitioner

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_m = d, \end{aligned} \quad (3)$$

sådana att Φ har ett konstant värde på varje halvöppen delrektangel $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

Vidare för beviset krävs det att man konstruerar trappfunktioner Ψ , f och Φ på Δ sådana att

$$\begin{aligned} 1. & \Phi \leq f \leq \Psi \\ 2. & \iint_{\Delta} \Psi \, dx \, dy - \iint_{\Delta} \Phi \, dx \, dy < \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

uppfylls för varje fixt $\varepsilon > 0$.

Beviset av (ii) grundar sig i att man från envariabelanalys vet att $\int_a^b f(x, y) \, dx$ existerar för varje fixt y givet att f är kontinuerlig. Låt då

$$\begin{aligned} A(y) &= \int_a^b f(x, y) \, dx \\ \Rightarrow \int_c^d dy \left(\int_a^b f \, dx \right) &= \int_c^d A(y) \, dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Det räcker därför nu att visa att $A(y)$ är en kontinuerlig funktion, vilket görs med ett ε - δ -argument.

För beviset av (iii) är det uppenbart att Fubinis sats gäller för trappfunktioner. Det räcker att bevisa att om Φ och Ψ är trappfunktioner, och om $\Phi \leq f \leq \Psi$ gäller att

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) \, dx \, dy \leq \int_c^d dy \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) \leq \iint_{\Delta} \Psi(x, y) \, dx \, dy. \quad (6)$$

1.1 Teorin för dubbelintegraler över mer allmänna kompakta områden i $\mathbb{R}^2$

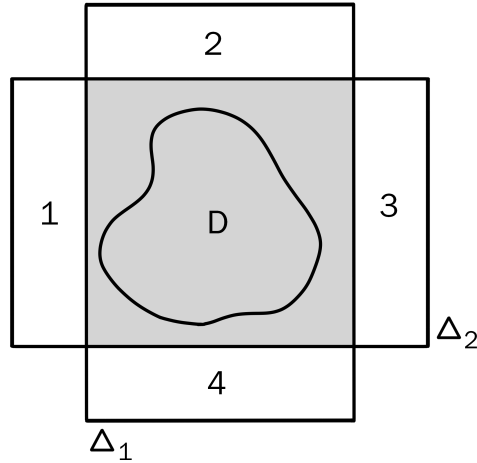
Definition: Låt $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ med $D_1 \subseteq D_2$, och låt $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$. *Nollutvidgningen* av f till D_2 är funktionen $f_{D_2} : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av

$$f_{D_2}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{då } \vec{x} \in D_1 \\ 0, & \text{då } \vec{x} \in D_2 \setminus D_1. \end{cases} \quad (7)$$

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd. En funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ sägs vara integrerbar över D om det finns någon axelparallell rektangel $\Delta \in \mathbb{R}^2$ sådan att $D \subseteq \Delta$ och f_{Δ} är integrerbar över Δ . Då definieras dubbelintegralen av f över D enligt

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f_{\Delta}(x, y) \, dx \, dy. \quad (8)$$

Definitionen kan visualiseras med figur 1:



Figur 1: Δ_1 och Δ_2 är två axelparallella rektanglar som båda innehåller mängden D . $\Delta_1 \cap \Delta_2$ är gråmarkerat.

Även $\Delta_1 \cap \Delta_2$ är en axelparallell rektangel som innehåller mängden D . $f_{\Delta_1} \equiv 0$ i områdena 2 och 4 och $f_{\Delta_2} \equiv 0$ i områdena 1 och 3. Det leder till att:

$$\begin{aligned}
 &f_{\Delta_1} \text{ är integrerbar över } \Delta_1 \\
 &\quad \Updownarrow \\
 &f_{\Delta_2} \text{ är integrerbar över } \Delta_2 \\
 &\quad \Updownarrow \\
 &f_{\Delta_1 \cap \Delta_2} \text{ är integrerbar över } \Delta_1 \cap \Delta_2
 \end{aligned} \tag{9}$$

vilket då i sin tur leder till att

$$\iint_{\Delta_1} f_{\Delta_1} dx dy = \iint_{\Delta_2} f_{\Delta_2} dx dy = \iint_{\Delta_1 \cap \Delta_2} f_{\Delta_1 \cap \Delta_2} dx dy. \tag{10}$$

2 Trippelintegraler

Trippelintegraler bygger på teorin av dubbelintegraler, som man utvidgar till fallet av tre variabler.

2.1 Itererad integration

Genom itererad integration kan man beräkna trippelintegraler med metoder från dubbelintegraler. Trippelintegralen

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad (11)$$

är definierad på ett område D . Området D ligger mellan två funktionsgrafer $\alpha(x, y)$ och $\beta(x, y)$,

$$D = \{(x, y, z) \mid \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \mid (x, y) \in E\} \quad (12)$$

där projektionen av D på xy -planet är området E .

Detta innebär att integralen kan beräknas med tidigare kunskaper genom

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_E \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (13)$$

I ekvationen ovan placerades dubbelintegralen ytterst och nästa metod diskuterar då dubbelintegralen placeras innerst. Den första integrationen sker över en yta D_x parallell med yz -planet, där integralens undre gräns är ytans nedersta x -värde. Den övre gränsen bestäms genom ett analogt tillvägagångssätt. Detta ger

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx. \quad (14)$$

2.2 Cylindriska koordinater

Cylindriska koordinater är en generalisering av polära koordinater till tre dimensioner. I cylindriska koordinater behålls z -koordinaten. Följande ekvation illustrerar hur θ , r och z förhåller sig till varandra:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\Longleftrightarrow (r, \theta, z) \\ x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned} \quad (15)$$

Den infinitesimala volymen kommer ändras vid variabelbytet till de cylindriska koordinaterna. Denna faktor, fås fram genom absolutbeloppet av funktionalma-

trisen (*Jacobianen*). Jacobianens determinant för cylindriska koordinater blir då

$$dxdydz = r drd\theta dz. \quad (16)$$

2.3 Sfäriska koordinater

I sfäriska koordinater byter man alla tre variabler. Följande ekvation förklarar sambandet mellan dem:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\iff (r, \theta, \phi) \\ x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad (17)$$

Observera att r inte är samma r som i polära koordinater. Här refererar r istället till avståndet i rummet mellan origo och den givna punkten.

På analogt tillvägagångssätt som till cylindriska koordinater fås Jacobianen fram. Det vill säga den infinitesimala förändringen i volym, vilken då blir

$$dxdydz = r^2 \sin(\theta) drd\theta d\phi. \quad (18)$$

3 Tillämpningar av trippel- och multipelintegraler

Det finns flera tillämpningar av trippelintegraler, varav de flesta är användbara inom exempelvis mekanik. I detta avsnitt beskrivs volymberäkningar i $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^n$ samt massa, medelvärde och masscentrum för tredimensionella kroppar.

3.1 Volymberäkningar i $\mathbb{R}^3$

Definition: Låt K vara en kompakt och begränsad kropp i $\mathbb{R}^3$. Volymen $\mu(K)$ ges av:

$$\mu(K) = \iiint_K 1 dxdydz. \quad (19)$$

Hur trippelintegralen (19) faktiskt beräknas beror på kroppen K . Koordinatbyten till exempelvis sfäriska eller cylindriska koordinater är alternativ och ofta går det att reducera trippelintegralen till en enkel- eller dubbelintegral, vilket beskrivs i avsnitt 3.1.1 och 3.1.2.

3.1.1 Enkelintegral som inre integral

Definition: Låt K vara en kropp i $\mathbb{R}^3$. Om kroppen ligger mellan två kontinuerliga funktionsytor $f(x, y)$ och $g(x, y)$, d.v.s. att

$$K = \{(x, y, z) \mid f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}, \quad (20)$$

så kan volymintegralen reduceras till en dubbelintegral. Integrationsgränserna för dubbelintegralen kommer då, om D är en kompakt mängd i xy -planet, vara K 's projektion D på xy -planet. Volymen kan då skrivas som

$$\mu(K) = \iiint_K 1 \, dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz = \iint_D (g(x, y) - f(x, y)) \, dx dy. \quad (21)$$

3.1.2 Dubbelintegral som inre integral

Principen med denna metod är att istället skiva upp kroppen K i tvärsnittsareor med en given area som en funktion av höjden z och därefter integrera en enkelintegral längs med höjden z .

Definition: Låt K vara en kropp i $\mathbb{R}^3$. Om kroppen på en höjd z har en tvärsnittsarea som kan beskrivas som en kontinuerlig funktion $A(z)$ mellan $z = a$ och $z = b$ kan volymintegralen reduceras till en enkelintegral. Kroppen ges av

$$K = \{(x, y, z) \mid a \leq z \leq b, (x, y) \in D(z)\}, \quad (22)$$

där $D(z)$ är ett område på höjden z med en area $A(z) = \iint_{D(z)} dx dy$. Volymen $\mu(K)$ kan då uttryckas som

$$\mu(K) = \iiint_K 1 \, dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{D(z)} dx dy = \int_a^b A(z) \, dz. \quad (23)$$

3.2 Volymberäkningar i $\mathbb{R}^n$

Här redovisas ett exempel för en boll i $\mathbb{R}^n$. Först undersöks det då bollen ingår i två dimensioner och har en radie av längd 1.

Låt $n \geq 1$, samt låt B beteckna bollen. $B_n = B_{n,1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$. Ansätt μ som

$$\mu_n = \text{vol}(B_n) = \int \dots \int 1 \, dx_1 \dots dx_n \quad (24)$$

där andra likhetssteget sker på grund av definition av volym. Detta leder till att volymen av klotet med radie r i olika dimensioner kan fås av rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2} \\ \forall n &\geq 3 \\ \mu_1 &= 2 \\ \mu_2 &= \pi. \end{aligned} \quad (25)$$

Om man sätter radien till ett godtyckligt r istället för 1 ges volymen för klotet

$$V(B_{n,r}) = \mu r^n. \quad (26)$$

Trivialt förklaras detta genom att man skalar volymen $B_{n,1}$ med en faktor r i varje riktning n .

3.3 Massa, medelvärde och masscentrum

Trippelintegraler är också användbara för att beräkna totala massan och masscentrum för tredimensionella objekt. För att göra det krävs det också att medelvärdet av en funktion i flera variabler introduceras.

Definition: Ett objekt som upptar ett kvadrerbart och kompakt område K i $\mathbb{R}^3$ och som har en varierande densitet $\rho(x, y, z)$ sägs ha en *massa*, där massan $m(K)$ ges av

$$m(K) = \iiint_K \rho(x, y, z) \, dx dy dz. \quad (27)$$

Definition: Låt K vara en kompakt och kvadrerbart mängd i $\mathbb{R}^3$ och $f(x, y, z) : K \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. *Medelvärdet* av f i K ges av trippelintegralen

$$\frac{1}{\mu(K)} \iiint_K f(x, y, z) \, dx dy dz. \quad (28)$$

Definition: Låt K vara en kompakt och kvadrerbart mängd i $\mathbb{R}^3$. Om K har en massa m med densitet $\rho(x, y, z)$ kan *masscentrum* beräknas som medelvärdet av massans position. Masscentrum ges av $\bar{m} = (\bar{m}_x, \bar{m}_y, \bar{m}_z)$ där masscentrum ges på samma sätt för alla tre koordinater. Som en representation ges masscentrum för x-koordinaten för kroppen K av

$$\bar{m}_x(K) = \frac{\iint_K x \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\iiint_K \rho(x, y, z) \, dx dy dz}. \quad (29)$$

4 Parametriserade och orienterade kurvor

Definition: Låt $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$ och $k \geq 0$, $n \geq 1$, $k, n \in \mathbb{N}$ så att,

$$\begin{aligned} \vec{r} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{r}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned} \quad (30)$$

där $\vec{r}$ är en C^k -funktion. Då sägs r vara en *parametriserad och orienterad C^k -kurva* i $\mathbb{R}^n$. Kurvan beskriver en partikels position efter tiden t har förflutit då $a \leq t \leq b$ och därför kallas $\vec{r}(a)$ kurvans *startpunkt* och $\vec{r}(b)$ dess *slutpunkt*. Om en kurva börjar och slutar i samma punkt, alltså $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, så kallas kurvan *sluten* och om kurvan aldrig korsar sig själv, alltså $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ och $\vec{r}(a) \neq \vec{r}(b)$, så kallas kurvan *enkel*.

4.1 Orienteringsbyte

Att byta orientering betyder att följa kurvan på motsatt håll från den ursprungliga orienteringen. Om $\vec{r}(a)$ var startpunkten i den ursprungliga orienteringen så kommer $\vec{r}(a)$ vara slutpunkten i den nya. Eftersom vi rör oss längs kurvan på motsatt håll från den ursprungliga orienteringen kommer hastigheten vara annorlunda, men farten kommer fortfarande vara samma i varje punkt. Orienteringsbytet definieras enligt följande

$$\begin{aligned}\vec{S} : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{r} : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{S}(t) &= \vec{r}(a + b - t), \quad a \leq t \leq b,\end{aligned}\tag{31}$$

där $\vec{S}(t)$ är funktionen för kurvan efter att vi bytt orientering.

4.2 Parametriseringsbyte

Ett parametriseringsbyte innebär att man ändrar tidsskalan för en kurva och/eller ändrar tiden det tar partikeln att passera över hela kurvan. Detta innebär att det kan ta mer eller mindre tid för partikeln att passera genom hela kurvan, men det kan också vara så att det tar lika lång tid och att partikeln istället åker långsammare på vissa delar av kurvan och snabbare på andra. Ett parametriseringsbyte definieras som

$$\begin{aligned}\vec{S} : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{r} : [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi : [a, b] &\longrightarrow [c, d]\end{aligned}\tag{32}$$

där alla tre funktioner är C^k -funktioner och ϕ är bijektiv och för att ett byte ska vara giltigt måste funktionerna uppfylla tre krav:

$$\begin{aligned}
i) \quad & \varphi(a) = c, \varphi(b) = d \\
ii) \quad & t_1 \leq t_2 \Rightarrow \phi(t_1) \leq \phi(t_2) \\
iii) \quad & \forall t \in [a, b], \vec{r}(t) = \vec{S}(\phi(t)).
\end{aligned} \tag{33}$$

Om alla krav är uppfyllda så är $\vec{S}(\varphi(t))$ en ny parametrisering av $\vec{r}$.

5 Parametrisering av ytor

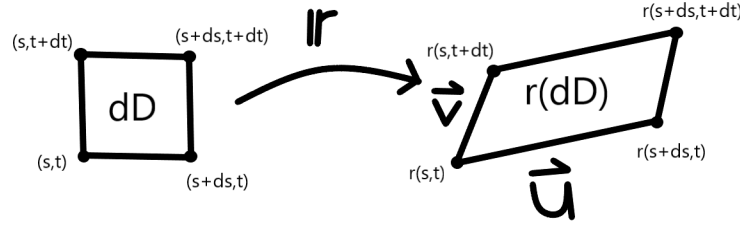
Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd och låt $\vec{r}$ vara en C^k -funktion $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. $\vec{r}$ kallas då för en *parametriserad C^k -yta*.

För att parametrisera en yta behövs två parametrar. Med parametrarna s och t är en parametrisering av en yta i rummet

$$\begin{aligned}
\vec{r}: D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
(s, t) &\mapsto \vec{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)).
\end{aligned} \tag{34}$$

5.1 Arean av en parametriserad yta

Vi tar ett infinitesimalt areaelement dD som genom parametriseringen $\vec{r}$ övergår i $\vec{r}(dD)$ som spänns upp av vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{u}$, se figur 2.



Figur 2: Den infinitesimala arean dD övergår i $\vec{r}(dD)$ via parametriseringen i ekvation 34.

Den infinitesimala arean ges av

$$dS = \|\vec{u} \times \vec{v}\|. \tag{35}$$

Där är

$$\vec{u} = \vec{r}(s + ds, t) - \vec{r}(s, t) = \vec{r}(s, t) + \frac{\partial \vec{r}(s, t)}{\partial s} \cdot ds - \vec{r}(s, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot ds \tag{36}$$

och på samma sätt fås $\vec{v}$ till

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot dt. \quad (37)$$

Således är

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot ds \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot dt \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| ds dt. \quad (38)$$

Arean för hela ytan $\vec{r}(s, t)$ fås följaktligen genom formeln

$$\mathbf{Ytarean} = \iint_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| ds dt. \quad (39)$$

Notera att eftersom kryssprodukten av två vektorer är ortogonal mot båda vektorerna är $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ en normalvektor till tangentplanet till ytan i punkten $\vec{r}(s, t)$.

5.2 Ytarean av en funktionsyta

Då en yta hör till en funktionsgraf $z = f(x, y)$ är den naturliga parametreringen

$$\begin{aligned} \vec{r}: D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)). \end{aligned} \quad (40)$$

De partiella derivatorna med avseende på parametriseringen blir då

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= (1, 0, f_x) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= (0, 1, f_y) \\ \Rightarrow dS &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| dx dy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \end{aligned} \quad (41)$$

Detta innebär att arean av ytan till en funktionsgraf kan räknas ut genom formeln

$$\mathbf{Ytarean av en funktionsgraf} = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy. \quad (42)$$

5.3 Areal av nivåytor

Ytan Π är en nivåyta till C^1 -funktionen $F(x, y, z) = C$. Antag att $F_z \neq 0$ över hela nivåytan. Då säger *implicita funktionssatsen* att z kan uttryckas av C^1 -funktionen

$$z = f(x, y) \quad (43)$$

där

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{F_x}{F_z} \\ f_y &= \frac{F_y}{F_z}. \end{aligned} \quad (44)$$

Det innebär att ytarean ges av

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}} \, dxdy \quad (45)$$

$$\Rightarrow \text{Arean av en nivåyta} = \iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} \, dxdy. \quad (46)$$

6 Kurvlängd och arbetsintegraler

Beräkning av kurvors längd och arbetet som utförs av en partikel som färdas längs en kurva är något som har många praktiska tillämpningar.

6.1 Längden av en kurva

Definition: Definiera en parametriserad och orienterad C^k kurva enligt avsnitt 4. Längden av en kurva bestäms av formeln

Kurvans ekvation $= \vec{r}(t)$

Kurvans längd mellan a och b $= \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt \quad (47)$

Exempel i tre dimensioner: $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$

Detta tolkas som att $\vec{r}(t)$ är ekvationen för en partikels rörelse längs en kurva beroende av tiden t . Den sträcka partikeln färdas fås fram genom integrering över infinitesimala sträckor på kurvan, vars längd fås genom multiplikation av partikelns hastighet vid en viss tid t med en infinitesimal tid dt beräknas.

Ett ofta användbart specialfall, där kurvan är av två variabler, är:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(x) &= (x, y(x)) \\
\frac{d\vec{r}}{dx} &= (1, y'(x)) \\
\|\vec{r}'\| dx &= \sqrt{1 + y'(x)^2} dx \\
\text{Kurvlength} &= \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.
\end{aligned} \tag{48}$$

Denna formel tolkas som att $\vec{r}(x)$ är ekvationen för en partikels rörelse längs en kurva. Notera att $\vec{r}(x)$ är på formen $(x, y(x))$ och alltså beror av en enda variabel. Kurvans längd mellan punkterna $\vec{r}(a)$ och $\vec{r}(b)$ kan beräknas som $\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$ vilket tolkas som summan av alla små stycken av kurvan, uppskattade genom kurvans derivata i denna punkt över en infinitesimal sträcka dx .

6.2 Arbetsintegraler

Definition: *Arbetet* som uträttas då en partikel färdas längs en bana $\vec{r}(t)$ genom ett *kraftfält* F . Kraften i en punkt skrivs som $F(\vec{r}(t))$. Arbetet mellan punkterna $\vec{r}(a)$ och $\vec{r}(b)$ beräknas som

$$\text{Arbete mellan (a) och (b)} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt. \tag{49}$$

Detta tolkas som integralen av kraften över en infinitesimal sträcka som är parallell med kurvans tangent vid denna tidpunkt multiplicerat med längden på den infinitesimala sträckan. Den parallella delen av kraften bestäms genom användning av skalärprodukt.