

Tavelpresentation

August Blanc, Lise Hanebring, Louise Johansson, Pontus Nilsson,
Eric Wahlström, Stefan Zoric

February 2021

1 Introduktion av kurvintegraler

För att introducera det nya begreppet, kurvintegraler, används följande definition. Låt $n \in \mathbf{N}$, låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett C^0 -vektorfält och låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en parametriserad och orienterad C^1 -kurva. Då definieras kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs kurvan enligt

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (1)$$

Värdet av integralen kallas för arbetet som uträttas av $\mathbf{F}$. Det finns två viktiga propositioner:

- Kurvintegralen är oberoende av parametriseringen, d.v.s. att den endast beror på själva banan och inte på hur den genomlöps exakt.
- Integralen byter tecken då kurvan byter orientering.

För att nu kunna använda sig av och beräkna olika kurvintegraler behöver notationer, konventioner och beteckningar införas. Det finns 6 stycken:

1. Beteckning av kurva: $\gamma = \mathbf{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$
2. P.g.a. propositionerna kan en mer kompakt notation för kurvintegralen användas:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2)$$

3. För $n = 2$ ger det att $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. Detta implicerar att: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Pdx + Qdy$ som i sin tur ger följande kurvintegral:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} Pdx + Qdy \quad (3)$$

För $n = 3$ ger det att $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (P, Q, R)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$. Detta implicerar att: $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ som i sin tur ger följande kurvintegral:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz \quad (4)$$

4. Låt $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ vara C^1 -kurvor så att för varje $i = 1, \dots, n-1$, så är slutpunkten av γ_i = startpunkten av γ_{i+1} . Då betecknas $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ som den styckvis C^1 -kurvan man får om man så kallat limmar ihop dem. Observera att $\gamma_2 + \gamma_1$ kan vara odefinierad även om $\gamma_1 + \gamma_2$ är definierad. Notera även:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5)$$

5. Med $-\gamma$ menas samma kurva som γ med motsatt orientering

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (6)$$

6. Integralen

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (7)$$

indikerar att γ är en sluten kurva. Även enkla och slutna kurvor kan ha olika riktningar och därav är det naturligt att fråga sig "åt vilket håll?"

För att besvara frågan i notation (6) hänvisar man till Jordan Curve Theorem som säger: Låt γ vara en enkel och sluten C^0 -kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt 2 sammanhängande komponenter. Dessa komponenter kallas för kurvans insida och utsida. Insidan är alltid en begränsad mängd, och utsidan är den mängd som alltid är obegränsad. Definition: Låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$, sägs γ vara orienterad moturs/positivt orienterad om insidan av γ ligger till vänster om färdriktningen. Och den sägs vara orienterad medurs/negativt orienterad, om insidan av γ ligger till höger om färdriktningen. **Konvention:**

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8)$$

innebär moturs/positivt.

$$\oint_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9)$$

innebär medurs/negativt.

2 Kurvintegraler med parametrisering och introduktion av potential

Beräkning av kurvintegraler kan generellt göras på tre sätt - genom parametrisering, med potential då vektorfältet är konservativt eller med Greens sats. Att beräkna kurvintegraler med parametrisering följer direkt av definitionen för kurvintegral och kan illustreras med ett exempel.

Exempel: För ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = (8x^2 - y^2, 2x^2 + y)$ och kurvan γ som är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(0, 4)$ kan kurvintegralen

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10)$$

beräknas genom att parametrisera γ på de tre olika intervallen mellan punkterna. Mellan $(0, 0)$ och $(2, 0)$ kan kurvan parametriseras med $\mathbf{r}(t) = (t, 0)$ där $0 \leq t \leq 2$. Från kurvintegralens definition och insättning av parametriseringen fås att första delen av kurvintegralen kan beräknas med

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}(t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_{\gamma_1} (8t^2, 2t^2) \cdot (1, 0) dt = \int_0^2 8t^2 dt \quad (11)$$

där resultatet blir $\frac{64}{3}$. Om samma sak görs för det andra och tredje intervallet på kurvan summeras sedan integralerna över delkurvorna för att bestämma värdet på kurvintegralen 10, som blir $\frac{64}{3}$.

För att slippa parametrisera kan man beräkna kurvintegraler med potential istället, men för detta krävs det att vektorfältet är konservativt. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ sägs vara konservativt om det existerar ett skalärfält ϕ sådant att $\nabla\phi = \mathbf{F}$, där $\mathbf{F}$ och ϕ måste vara definierade på samma domän D i $\mathbb{R}^n$. Om detta gäller kallas ϕ för $\mathbf{F}$:s potential. Enligt en sats kan kurvintegralen sedan beräknas med

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) \quad (12)$$

där $\mathbf{a}$ är kurvans startpunkt och $\mathbf{b}$ kurvans slutpunkt. För denna sats krävs att $\mathbf{F} \in C^0$ är konservativt och $\gamma \in C^1$ är definierad i samma domän D som $\mathbf{F}$ och ϕ .

Bevis: C^1 -parametrisera γ som $\mathbf{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$. Enligt definitionen av kurvintegral och eftersom $\mathbf{F}$ är konservativt fås att vänsterledet i 12 kan skrivas om till

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) dt. \quad (13)$$

Detta uttryck kan skrivas om genom att använda kedjeregeln baklänges och därefter integralkalkylens fundamentalsats. Det är således lika med

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) \quad (14)$$

vilket är högerledet i ekvation 12. VSB.

Satsen får två intressanta följder för kurvintegraler för konservativa vektorfält. Två kurvor med samma start och slutpunkt kommer alltid ha samma värde på kurvintegralen mellan punkterna, och slutna kurvor kommer ge värdet noll på kurvintegralen eftersom $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. I parametriseringsexemplet inses då att $\mathbf{F}$ inte kan vara konservativt, eftersom kurvintegralen över den slutna kurvan var nollskiljd.

3 Potentialer och slutna kurvintegraler

3.1 Framtagning av potentialfunktionen

Ifall det går att integrera fältet i alla dimensioner var och en för sig så att resultatet går ihop så kan det stämma att $\nabla\Phi = F$.

Av definitionen framgår att $F(x, y) = (\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y})$, och på motsvarande sätt i fler dimensioner. Detta kan skrivas ut som ett ekvationssystem:

$$F_1(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (15)$$

$$F_2(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (16)$$

Eftersom det måste gälla att

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (17)$$

är det i vissa fall möjligt att härifrån ta fram en funktion Φ . I de fall där det är omöjligt att ta fram en sådan funktion kan en sådan funktion inte heller finnas, varför fältet inte kan vara konservativt.

I fler dimensioner blir ekvationssystemet naturligt mer svårlöst, men en existerande potentialfunktion Φ måste alltid lösa ekvationssystemet. Ett lämpligt tillvägagångssätt kan vara att integrera alla komponenterna var och en

för sig och se om det kan stämma. I tre dimensioner:

$$\int F_1(x, y, z) dx = f_1(x, y, z) + g_1(y, z) \quad (18)$$

$$\int F_2(x, y, z) dy = f_2(x, y, z) + g_2(x, z) \quad (19)$$

$$\int F_3(x, y, z) dz = f_3(x, y, z) + g_3(x, y) \quad (20)$$

Ifall det är möjligt att välja g_1 , g_2 och g_3 så att

$$\Phi(x, y, z) = f_1(x, y, z) + g_1(y, z) = f_2(x, y, z) + g_2(x, z) = f_3(x, y, z) + g_3(x, y) \quad (21)$$

finns det en lösning till ekvationssystemet och därmed en potentialfunktion Φ . Samma princip som gäller för tre variabler kan användas för n variabler.

3.2 Slutna kurvintegraler

På grund av att kurvintegraler i konservativa vektorfält är lika med potentialförändringen framgår att alla slutna kurvintegraler i ett vektorfält måste ha värdet 0. Även det omvända gäller enligt en sats. Därmed är det ekvivalenta påståenden att alla möjliga slutna kurvintegraler i ett visst vektorfält har värdet 0 och att vektorfältet är konservativt.

Bevis: Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält i en bågvisst sammanhängande öppen mängd. Låt γ_1 vara en C^1 -kurva med start i $\mathbf{A}$ och slut i $\mathbf{B}$. Låt γ_2 vara en rak linje från $\mathbf{B}$ till $\mathbf{C} = \mathbf{B} + he_i$, där e_i är en enhetsvektor i samma riktning som variabeln x_i . Eftersom vi antar att alla slutna kurvintegraler har värdet 0 måste alla kurvintegraler vara oberoende av vägval. Det spelar därmed ingen roll vilken väg från $\mathbf{A}$ till $\mathbf{B}$ som γ_1 tar. Därmed kan vi välja funktion U sådant att

$$U(\mathbf{B}) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (22)$$

gäller för alla punkter $\mathbf{B}$ och C^1 -kurvor γ_1 som uppfyller definitionen ovan. Det står även klart att om så är fallet måste

$$U(\mathbf{C}) = \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (23)$$

om γ_3 är en C^1 -kurva med start i $\mathbf{A}$ och slut i $\mathbf{C}$. Det står klart att vi kan välja $\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2$ och därmed att

$$U(\mathbf{C}) - U(\mathbf{B}) = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

vilket med hjälp av medelvärdessatsen ger

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} F_i dx_i = F_i(\mathbf{B} + \theta h e_i) \cdot h \quad (25)$$

där $0 \leq \theta \leq 1$. Dividerar vi allt med h får vi

$$\frac{U(\mathbf{B} + h e_i) - U(\mathbf{B})}{h} = F_i(\mathbf{B} + \theta h e_i) \quad (26)$$

vilket om vi låter h gå mot 0 innebär att $\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$. Eftersom detta gäller för alla index i har vi visat att $\nabla U = \mathbf{F}$ vilket per definition innebär att vektorfältet är konservativt. VSB.

4 Virvelfritt fält

Ett C^1 vektorfält $\mathbf{F}$ är enligt definitionen virvelfritt om $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Om man antar att $\mathbf{F}$ är konservativt och att det existerar ett U sådant att $\mathbf{F} = \nabla U$ där $\mathbf{F}$ är en C^1 kurva och U en C^2 kurva kan man bevisa att om $\mathbf{F}$ är konservativt implicerar det att $\mathbf{F}$ även är virvelfritt genom:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (27)$$

och det är bevisat att om $\mathbf{F}$ konservativt $\Rightarrow \mathbf{F}$ virvelfritt

Följande exempel illustrerar att det omvända inte alltid gäller:

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (28)$$

För att visa att F är virvelfritt ska $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Detta visas tämligen enkelt då:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (29)$$

samt att:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (30)$$

Eftersom de båda derivatorna är lika är $\mathbf{F}$ virvelfritt. Nu återstår att visa om $\mathbf{F}$ är konservativt. Om F ej är konservativt gäller att det finns en sluten

kurva γ så att $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$. I det här exemplet väljer vi $r(t) = (R \cos t, R \sin t)$ vilket ger:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2}, \frac{R \cos t}{R^2} \right) \cdot (-R \sin t, R \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 \sin^2(t)}{R^2} \right) + \left(\frac{R^2 \cos^2(t)}{R^2} \right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned} \quad (31)$$

Integralen är alltså nollskild och det är visat att om $\mathbf{F}$ är virvelfritt inte implicerar att $\mathbf{F}$ är konservativt. Sammanfattningsvis gäller det att om banan innesluter origo kommer arbetet som utförs att vara nollskild.

5 Greens sats i planet

Låt P och Q vara C^1 -funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D till Ω har den positivt orienterade randen ∂D bestående av C^1 -kurvor, gäller att

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (32)$$

Exempel: Beräkna kurvintegralen

$$K = \oint_{\gamma} (ydx + 2xdy), \quad (33)$$

där γ är enhetscirkelns rand följd moturs.

Lösning: Uppenbart uppfylls kraven till greens formel, därför tillämpar vi denna på integralen

$$K = \oint_{\gamma} (ydx + 2xdy) = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \right) dxdy = \iint_D dxdy, \quad (34)$$

där D är området inneslutet av γ . Uttrycket känns igen som en helt vanlig areaintegral över D , vilket ger att

$$K = 1^2 \cdot \pi = \pi. \quad (35)$$

Svar: Kurvintegralens värde är π .

6 Greens sats i rummet

Vid övergången från planet till rummet för vektoranalysen är det fördelaktigt att först illustrera en skillnad som uppstår mellan planet och rummet med ett par fysikanknutna exempel. Från fysiken är det känt att gravitationskraftfält från en stor punktmassa samt elektriska fält från punktladdningar är konservativa vektorfält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, om punktmassan respektive punktladdningen befinner sig i origo. Det är känt att kurvintegraler, arbete, för dessa vektorfält kan beräknas med hjälp av potential och de måste ju således vara konservativa. Båda dessa fält är konservativa i rummet där just en *punkt* har uteslutits från definitionsområdet.

Om istället magnetfältet $\mathbf{B}$ som produceras av konstant ström I genom en oändligt lång och tunn ledare betraktas, där strömriktningen är i positiv z-led, kan $\mathbf{B}$ skrivas som

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{I\mu}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right) & \text{på } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\} \\ \text{Odefinierat} & \text{på } \{(0, 0, z)\}. \end{cases} \quad (36)$$

Fältet kan betraktas i två dimensioner eftersom dess z-komponent är 0. Då återfås fältet i uttryck 28 som behandlades i avsnitt 4, så när som på en konstant faktor. Som visades där är fältet virvelfritt men inte konservativt, vilket således gäller även för $\mathbf{B}$ för varje värde på z.

Intressant är att då endast en *punkt* tas bort från definitionsområdet måste vektorfältet, om det är virvelfritt, fortfarande vara konservativt i alla punkter som tillhör definitionsområdet, men inte nödvändigtvis om en hel *linje* tas bort från definitionsområdet. Även om $\mathbf{B}$ är virvelfritt är det inte konservativt i sin definitionsomängd. Detta gäller i allmänhet och inte bara i dessa exempel, och kommer lägga grunden till definitionen av *enkelt sammanhängande* i tre och högre dimensioner.

6.1 Definition 1: curl, virvelfria fält i $\mathbb{R}^3$.

Om $\mathbf{F}$ är ett C^1 -vektorfält definieras rotationen av $\mathbf{F}$ som: $\text{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$ vilket blir följande:

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (37)$$

Fältet $\mathbf{F}$ sägs vara virvelfritt om $\text{curl}(\mathbf{F}) = \vec{0}$.

6.2 Definition 2: divergens av vektorfält.

Divergensen av ett C^1 -vektorfält $\mathbf{F}$ definieras som skalärfältet

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \quad (38)$$

6.3 Gauss divergenssats.

Låt $\mathbf{G}$ vara ett C^1 -vektorfält definierat i någon öppen mängd Ω i rummet. Om det kompakta delområdet D^* till Ω har en rand ∂D^* bestående av C^1 -ytor och med utåtriktad normal $\hat{N}$ gäller att

$$\oint_{\partial D^*} \mathbf{G} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbf{G}) dV \quad (39)$$

Notera att denna sats är mycket lik Greens formel i planet, men istället för en kurvas rand integreras här en ytas rand.