

Tavelpresentation LV6

Loke Gustafsson Rebecka Mårtensson Hugo Bäckman
Johannes Kron Anton Lyckhage Erik Blombäck

22 mars 2021

Innehåll

1	Kurvintegraler	1
2	Kurvor	2
2.1	Notation	2
2.2	Jordans kurvsats	3
3	Att beräkna kurvintegraler	3
4	Konservativa fält	4
5	Greens sats	5
6	Fysikaliska exempel	6
6.1	Newtons gravitationslag	6
6.2	Coulombs lag för elektrostatik	7
6.3	Biot-Savarts lag för magnetism	7
7	Omformuleringar av Greens sats	8
7.1	Som del av xy -planet i $\mathbb{R}^3$	8
7.2	Gauss divergenssats	8
8	Flödesintegraler	9

1 Kurvintegraler

Definition: Låt $n \in \mathbb{N}$ och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett $\mathcal{C}^0$ -vektorfält och låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en (parametriserad och orienterad) $\mathcal{C}^1$ -kurva. Då är kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs kurvan integralen

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Denna integrals värde kallas arbetet som uträttats av $\mathbf{F}$ och är oberoende av parametriseringen, dvs den beror enbart på själva banan och inte på hur den genomlöps. Däremot byter integralen tecken då kurvan byter orientering ty ett orienteringsbyte leder till att $\mathbf{r}'(t)$ byts ut mot $-\mathbf{r}'(t)$.

Då kurvintegralers värde är oberoende av val av parametrisering betecknas kurvintegraler ofta som

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

utan hänvisning till någon parametrisering, där γ betecknar kurvan.

2 Kurvor

2.1 Notation

1. En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sägs vara bågvisst sammanhängande om varje par punkter kan förbindas med en $\mathcal{C}^0$ -kurva som inte lämnar M ,

$$\forall p, q \in M \quad \exists \mathbf{r} : [a, b] \rightarrow M$$

Så att $\mathbf{r}(t)$ är $\mathcal{C}^0$ och $\mathbf{r}(a) = p$, $\mathbf{r}(b) = q$.

2. γ betecknar vanligtvis kurvor
3. Då $n = 2$ är $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (P, Q)$ och $d\mathbf{r} = (dx, dy) \Rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = P \cdot dx + Q \cdot dy$. Då $n = 3$ är $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz$
4. Låt $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ vara $\mathcal{C}^1$ -kurvor så att för varje $i = 1, \dots, (n-1)$ är slutpunkten av γ_i = startpunkten för γ_{i+1} . Detta noteras som:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i$$

Och integralen längs γ kan skrivas som:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

OBS: $\gamma_2 + \gamma_1$ kan vara odefinierad även om $\gamma_1 + \gamma_2$ är definierad.

5. Med $-\gamma$ menas samma kurva som γ fast med motsatt orientering

$$\Rightarrow \int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

6. Notationen

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

indikerar att γ är en sluten kurva

2.2 Jordans kurvsats

Jordans kurvsats säger att varje kontinuerlig, sluten och enkel kurva i planet delar upp planet i en del I som innesluts av kurvan och en del utanför kurvan Y . Mer precist är I och Y två disjunkta sammanhängande delmängder sådana att både I och Y har kurvan som rand och det inre området I är begränsat medan det yttre området Y är obegränsat. Observera att det att den ena mängden är begränsad medan den andra är obegränsad gör det möjligt att skilja mellan de två mängderna. Jordans kurvsats kan verka uppenbar men är i själva verket mycket svårbevisad.

Detta låter oss entydigt bestämma i vilken riktning kurvintegraler längs en rand går genom att bestämma huruvida insidan ska vara till vänster eller höger i kurvans riktning. Enligt konvention är insidan till vänster, och den enkla kurvan längs en rand går moturs.

3 Att beräkna kurvintegraler

För ett $\mathcal{C}^0$ -fält $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ på en domän $D \subseteq \mathbb{R}^n$ och en $\mathcal{C}^1$ -kurva $\gamma \in D$ kan kurvintegraler bland annat beräknas genom

1. Parametrisering:

Om $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en parametrisering av γ och γ går från $\mathbf{r}(a)$ till $\mathbf{r}(b)$, gäller enligt kurvintegralens definition att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

2. En potential:

Om $\mathbf{F} = \nabla\phi$ och kurvan γ går från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$ har vi att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

3. Greens sats:

Om $n = 2$ och $\gamma = \partial\Sigma$ är en enkel sluten kurva där $\Sigma \subset D$ gäller

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Greens sats kan generaliseras till 3 dimensioner i form av Stokes sats som vi går igenom i LV7. Stokes sats kan i sin tur generaliseras till ännu högre dimensioner, men det gör vi inte i denna kurs.

Dessutom kan man transformera kurvintegraler genom att addera och subtrahera kurvor. Detta används speciellt för att sluta en icke-sluten kurva så att Greens sats kan användas.

4 Konservativa fält

Konservativa fält är $\mathcal{C}^0$ -vektorfält $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ där kurvintegralens värde enbart beror på kurvans start- och slutpunkt. Mer formellt är konservativa fält vektorfält för vilka det finns ett skalarfält $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ sådant att $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Det följer från denna definition att för alla $\mathcal{C}^1$ -kurvor γ i D så är $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$ där $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är γ 's start- och slutpunkter. Här följer ett bevis av detta:

Bevis: Välj en $\mathcal{C}^1$ -parametrisering av γ , säg $\mathbf{r}(t)$, där t går från $a \in \mathbb{R}$ till $b \in \mathbb{R}$. Det följer att kurvintegralen är

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) dt$$

där den sista likheten följer från kedjeregeln. Från Integralkalkylens fundamentalsats följer det sedan att

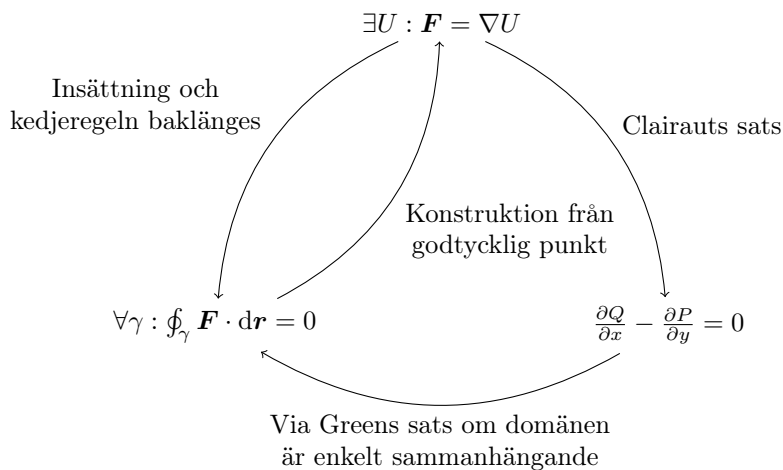
$$\int_a^b \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) dt = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

vilket avslutar beviset. ■

Det finns ett flertal sätt att undersöka om vektorfält är konservativa. Till att börja med, om man kan visa att samtliga slutna kurvor γ 's kurvintegraler $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är noll så gäller det att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt. Ett annat sätt är att undersöka huruvida vektorfältet ifråga är virvelfritt. Virvelfrihet innebär för vektorfält i $\mathbb{R}^2$ att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

där $\mathbf{F} = (P, Q)$ för $\mathcal{C}^1$ -funktioner P och Q . Det gäller att alla konservativa vektorfält är virvelfria, vilket utgör ett möjligt första test för att kunna avgöra att ett vektorfält inte är konservativt. Omvändningen gäller dessutom under förutsättningen att domänen D är enkelt sammanhängande. Att en mängd är enkelt sammanhängande betyder att den både är bägvist sammanhängande och att alla slutna kurvor, som är inom mängden, har insidor (kurvors insidor är väldefinierade enligt Jordans kurvsats) är delmängder till mängden. Intuitivt innebär det att D inte har några hål.



5 Greens sats

Definitionen av Greens sats i $\mathbb{R}^2$ är: Låt P och Q vara två $\mathcal{C}^1$ -funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som utgörs av en eller flera styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurvor, alla positivt orienterade, så är

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

vilket även kan skrivas

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

där $\mathbf{F} = (P, Q)$. Positiv orientering innebär att D ligger till vänster om färdriktningen längs dess rand.

Beviset av Greens sats görs för reguljära områden. Att D är reguljärt i x -led innebär att D kan delas upp $D = \cup_{i=1}^n D_i$ där $D_i = \{(x, y) \mid a_i < x < b_i, \alpha_i < y < \beta_i\}$. Varje ∂D_i kan då delas in i fyra kurvor $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ där $\gamma_1 = \alpha_i(x)$ från $x = a_i$ till $x = b_i$, $\gamma_3 = \beta_i(x)$ från $x = b_i$ till $x = a_i$ och γ_2 och γ_4 är de vertikala sträckorna från $\alpha_i(b_i)$ till $\beta_i(b_i)$ respektive $\beta_i(a_i)$ till $\alpha_i(a_i)$. Det gäller alltså att $\partial D_i = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

Fubinis sats ger att dubbelintegralen $\iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ kan beräknas genom att

enkelintegrera två gånger enligt:

$$\begin{aligned}
\iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{a_i}^{b_i} dx \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = \\
\int_{a_i}^{b_i} dx \left[-P(x, y) \right]_{y=\alpha_i(x)}^{y=\beta_i(x)} &= \int_{a_i}^{b_i} P(x, \alpha_i(x)) - P(x, \beta_i(x)) dx = \\
\int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_3} P dx &= \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} P dx + \int_{\gamma_3} P dx + \int_{\gamma_4} P dx \\
&= \oint_{\partial D_i} P dx.
\end{aligned} \tag{1}$$

Näst sista likheten kommer från att integralerna över både γ_2 och γ_4 i x -led är 0 eftersom $dx = 0$ (de är vertikala).

Per definition gäller att summan av alla dubbelintegraler över de olika delområdena D_i av D är lika med dubbelintegralen över hela området D .

$$\sum_{i=1}^n \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Från ekvation 1 gäller då att

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} P dx = \oint_{\partial D} P dx$$

En idé till varför sista likheten gäller är att alla kurvintegraler längs inre kanterna tar ut varandra, eftersom orienteringen är positiv och varje innerkurva täcks två gånger men åt olika riktningar. Det enda som blir kvar är då yttre randen av D . Med ett analogt resonemang visas att om D är reguljärt i y -led gäller

$$\oint_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

Om D är reguljärt, dvs det är reguljärt i både x - och y -led, gäller båda dessa likheter, och vi har alltså att

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

6 Fysikaliska exempel

6.1 Newtons gravitationslag

Enligt Newtons gravitationslag kan kraften på en massa m beräknas enligt

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \tag{2}$$

Notera att kraften skapas av växelverkan med en annan massa med en attraherande riktning mot M . Kraften är proportionerligt mot avståndet mellan massorna i kvadrat. Detta kan beskrivas som ett vektorfält i kartesiska koordinater i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F} = -GMm \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Om vi låter oss definiera det skalära fältet $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x, y, z) = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Då blir det lätt att kontrollera att se att $\mathbf{F} = \nabla\phi$ och därmed är $\mathbf{F}$ ett konservativt fält vilket medför att man enkelt kan beräkna den potentiella energin ϕ för en massa i ett gravitationsfält. I detta fall är $D(\mathbf{F}) : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ då vi placerar M i origo.

6.2 Coulombs lag för elektrostatik

Likt att en massa skapar ett konservativt vektorfält så ger en stationär laddning upphov till ett elektriskt fält,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3)$$

Detta elektriska fält ger upphov till en kraft på en laddning på fältet enligt $\mathbf{F} = \mathbf{E}q$. Fälten $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ är båda konservativa fält i $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ vid placering av en stationär laddningen Q i origo. Vi kan definiera den elektriska potentialen analogt till gravitationens potential. Med skalärfältet V som skrivs i sfäriska koordinater enligt

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$\nabla V = -\mathbf{E}.$$

Likt med gravitationen fältet så har det elektriska fältet domän enligt $D(\mathbf{E}), D(V) : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

6.3 Biot-Savarts lag för magnetism

Ett magnetiskt fält $\mathbf{B}(x, y, z)$ skapas av en rak ledare men konstant ström som man kan betrakta som en ledare med oändlig längd, infinitesimalt tunn placerat i vakuum längs med z -axeln

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Notera att vektorfältets z -komponent är 0. Detta medför att man kan betrakta det magnetiska fältet som ett 2-D vektorfält i ett plan parallellt med xy -planet.

Om det magnetiska fältet följer Biot-Savarts lag så är fältet inte konservativt, men likt (2) och (3) så är fältet virvelfritt i sin domän. Med virvelfria vektorfält i ett 2-D $\mathbf{F} = (P, Q)$ definieras med att

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Sats 1 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en enkel sammanhängande domän, och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett C^1 -vektorfält. Då gäller

$$\mathbf{F} \text{ virvelfritt} \implies \mathbf{F} \text{ konservativt}.$$

Båda (2) och (3) är virvelfria och har en enkel sammanhängande domän, Men med att det magnetiska fältet kan beskrivas som ett 2-D fält så $D(\mathbf{B}) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En domän som inte är sammanhängande och därmed inte uppfyller sats 1.

7 Omformuleringar av Greens sats

7.1 Som del av xy -planet i $\mathbb{R}^3$

Greens sats kan formuleras som

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{k} dx dy = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{N} dS$$

där den sista integralen använder en mer generell notation som vi kommer att kunna använda befogat efter att ha bevisat Stokes sats. Detta är en rimlig formulering då

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k} + \frac{\partial}{\partial z} (P\hat{j} - Q\hat{i}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

när $\mathbf{F}$ inte beror på z .

7.2 Gauss divergenssats

Gauss Divergenssats säger att

$$\oiint_{\partial V} (\mathbf{F} \cdot \hat{N}) dS = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$$

Satsen kommer att behandlas mer i detalj under nästa vecka. Nu begränsar vi oss till ett specialfall som vi kan härleda direkt med hjälp av Greens Sats.

Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett vektorfält och låt vektorfältet $\mathbf{G} = (Q, -P, 0)$. Greens Sats applicerad på $\mathbf{F}$ ger

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

som enligt hur vi definierade $\mathbf{G}$ kan skrivas som

$$\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot (dy, -dx, 0) = \iint_D (\nabla \cdot \mathbf{G}) dx dy.$$

Konstruera utifrån området D en volym $D^* = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\}$. Fubinis sats på de behandlade vänster och högerleden ger

$$\oiint_{\partial D^*} (\mathbf{G} \cdot \hat{N}) dS = \iiint_{D^*} (\nabla \cdot \mathbf{G}) dV.$$

Observera att denna nya formel är ett specialfall av Gauss Divergenssats.

8 Flödesintegraler

Flödesintegraler används för att beräkna det totala flödet genom en yta. Låt $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara det totala flödet, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $Y \subseteq \Omega$ vara en sluten och styckvis $\mathcal{C}^1$ -yta. Man kan skriva en sådan flödesintegral

$$\oiint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS$$

där N är den normal som pekar ut i varje punkt på den slutna ytan Y . Att Y är sluten innebär att $\mathbb{R}^3 \setminus Y$ har en in- och en utsida. Om den också är styckvis- $\mathcal{C}^1$ kommer insidan K vara kvadrerbar, $Y = \partial K$ och $K \cup \partial K$ vara kompakt.

Om ytan Y inte är sluten måste man välja normalen N så att den alltid har en positiv eller negativ z -komponent.

Notera också att det går att dela upp Y i dess komponenter $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n$ så att det finns en $\mathcal{C}^1$ -parametrisering $\mathbf{r} : D_i \rightarrow Y_i$ där $D_i \subseteq \mathbb{R}^2$ är en kompakt och kvadrerbar mängd för varje i eftersom att Y är styckvis $\mathcal{C}^1$.