

Tavelpresentation grupp 7

Joel Martinsson, Oscar Alkeskog, Rickard Dahlgren, Emma El-Helou,
Lorenz Engsner, Isak Talts

Mars 2021

1 Reguljära områden

Låt $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^3$ vara ett kompakt och kvadrerbart område. $\mathbf{D}$ sägs vara reguljärt med avseende på z om $\mathbf{D}$ kan delas upp i ändligt många delar där varje del $\mathbf{D}_i$, har formen:

$$\mathbf{D}_i = (x, y, z), (x, y) \in E_i, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)$$

där $\mathbf{E}_i \subseteq \mathbf{R}^2$ är ett kompakt och kvadrerbart område och där $f(x, y)$ och $g(x, y)$ är C^1 -funktioner som beror på variablerna x och y . På så sätt definieras reguljäritet med avseende på en variabel, i detta fall z . Analogt kan reguljäritet med avseende på x eller y definieras. Om området $\mathbf{D}$ är reguljärt med avseende på alla tre variabler sägs $\mathbf{D}$ vara reguljärt.

2 Bevis av Gauss sats för ett reguljärt område

Gauss sats beskriver i korthet att det totala flödet genom en kropp är det samma som det totala flödet ut ur dess yta. Denna relation framträder då divergensen för alla kroppens inre punkter summeras ihop och endast bidraget från randen kvarstår, eftersom flödet för närliggande punkter kancellerar varandra överallt förutom vid ytan.

Låt $\mathbf{D}$ vara ett reguljärt område med avseende på z . Vi ska nu bevisa att

$$\oint_{\partial \mathbf{D}} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_{\mathbf{D}} \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot dx dy dz \quad (2)$$

Området D är uppdelat i mindre områden D_i , där

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

Vi bevisar först att: D_i

$$\oint_{\partial D_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_{D_i} \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz \quad (3)$$

Definitionen för D_i gör att itererad integration (Fubinis sats) kan användas här med avseende på z . Integralen i högerledet blir:

$$\begin{aligned} \iint_{\pi(D_i)=E_i} dx dy &= \int_{f_i(x,y)}^{g_i(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} dz = \iint_{E_i} F_3(x, y, g_i(x, y)) dx dy - \iint_{E_i} F_3(x, y, f_i(x, y)) dx dy \\ A &= \iint_{E_i} F_3(x, y, g_i(x, y)) dx dy \\ B &= \iint_{E_i} F_3(x, y, f_i(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

Randen av D_i består av 3 delar:

(i) Ett "lock" på ovansidan av $z = g_i(x, y)$ som är en funktionsyta. Det gäller att:

$$\hat{\mathbf{N}} dS = \pm(-g_{i,x}, -g_{i,y}, 1) dx dy$$

Då enhetsnormalen ska peka ut från D_i och därmed ska ha en positiv z -komponent används plustecknet i ovanstående uttryck. Detta ger att:

$$\begin{aligned} \implies \hat{\mathbf{N}} dS &= (-g_{i,x}, -g_{i,y}, 1) dx dy \\ \implies (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= F_3(x, y, z = g_i(x, y)) dx dy \\ \implies \iint_{\text{topp av } \partial D_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \\ = \iint_{\pi(\text{topp})=E_i} F_3(x, y, g_i(x, y)) dx dy &= A \end{aligned}$$

(ii) Ett "lock" på undersidan av $z = f_i(x, y)$ det är bara alltså fet text som är en funktionsyta. Det gäller att:

$$\implies \hat{\mathbf{N}} dS = -(-f_{i,x}, -f_{i,y}, 1) dx dy$$

då enhetsnormalen nu pekar nedåt.

$$\begin{aligned} \implies (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= -F_3(x, y, z = f_i(x, y)) \\ \implies \iint_{\text{botten av } \partial D_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \\ = - \iint_{\pi(\text{botten})=E_i} F_3(x, y, f_i(x, y)) &= B \end{aligned}$$

(iii) Den vertikala delen av randen för D_i som går runt z -axeln och ligger mellan funktionsytorna.

Enhetsnormalen går åt samma riktning som xy -planet:

$$\implies \iint_{\text{mellandel av } \partial D_i} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = 0$$

då enhetsnormalens z -komponent är 0 och därmed har vi bevisat (3).

För att bevisa (2) adderas integraler av D_i för alla delområden från $i = 1$ till $i = n$, alltså:

$$\sum_{i=1}^n \iiint_{D_i} \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot dxdydz = \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot dxdydz$$

Detta gör man även för x och y .

För vänsterledet i (2) gäller att integralen över alla interna sidor kancellerar varandra. Då kan likhet gälla mellan VL och HL:

$$\oiint_{\partial D} (0, 0, F_3) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot dxdydz$$

På analogt vis kan man visa att om D är reguljärt med avseende på $\mathbf{x}$ så gäller att:

$$\oiint_{\partial D} (F_1, 0, 0) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot dxdydz \quad (4)$$

och om D är reguljärt med på avseende på $\mathbf{y}$ så gäller att:

$$\oiint_{\partial D} (0, F_2, 0) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot dxdydz \quad (5)$$

Om D är reguljärt så gäller (2), (4) och (5). Genom att addera dessa fås:

$$\oiint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F}) dxdydz, \quad V.S.V.$$

3 Orientering av en parametriserad yta

För att senare kunna formulera Stokes sats, behövs begreppet orientering för en parametriserad yta.

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt och kvadrerbar yta med positivt orienterad rand ∂D som består av en eller flera styckvis C^1 -kurvor.

Låt $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en C^1 -funktion.

Då gäller att

$Y=\mathbf{r}(D)$ är en parametriserad yta

$\partial Y:=\mathbf{r}(\partial D)$ är randen till Y

En viktig sak att tänka på är att Y sägs vara positivt orienterad om ∂Y ärver den positiva orienteringen från ∂D .

4 Stokes sats

Låt $\mathbf{F}$ vara ett C^1 -vektorfält i det öppna området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Låt Y vara en positivt orienterad C^1 -yta med den positivt orienterade randen ∂Y . Då gäller följande:

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

Likheten kallas Stokes sats och relaterar en arbetsintegral över en sluten kurva till en flödesintegral över en yta vars rand är kurvan.

Stokes sats är svår att bevisa för en generell yta, därför kommer det i beviset antas att ytan kan skrivas på formen $z = f(x, y)$, där $f \in C^2$

Planen är att börja med vänsterledet och med hjälp av 5 huvudsakliga steg få högerledet.

Steg 1. Eftersom det har antagits att ytan kan beskrivas som en C^2 -funktionsyta $z = f(x, y)$ gäller följande linjarisering

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ \implies \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= F_1 dx + F_2 dy + F_3 \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \end{aligned}$$

Steg 2. Det är nu ett tvåvariabelsuttryck, vilket innebär att Greens sats kan tillämpas.

$$\oint_{\partial D = \Pi(\partial Y)} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy = \iint_D \left(\frac{\partial(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} \right) dx dy$$

Steg 3. Med hjälp av produktregeln och kedjeregeln kan integranden skrivas om på följande vis

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x} - \frac{\partial(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ &\quad - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Steg 4. Med hjälp av Clairauts sats kan vissa termer kancelleras och de resterande termerna omordnas inför steg 5

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \\ & \left(-\frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Steg 5. Om man nu applicerar formeln för enhetsnormalen multiplicerat med det infinitesimala areaelementet av ytan Y är beviset klart.

$$\hat{\mathbf{N}}dS = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) dx dy$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}dS = \left[\left(-\frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

V.S.V

5 Nablaräkning

Inom vektoranalysen är den så kallade nablaoperatören, vilken betecknas med symbolen ∇ , en differentialoperator som vi har använt flera gånger ovan. Den kan skrivas $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Det finns ett flertal identiteter av intresse där nablaoperatören ingår och vi kommer behandla tre av dessa:

- (i) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ då $\mathbf{F} \in C^2$
- (ii) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ då $\phi \in C^2$
- (iii) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ då $\mathbf{F} \in C^2$

Första likheten kan med ord beskrivas som att divergensen av vektorfältet som ges av rotationen av $\mathbf{F}$ är lika med noll. Identiteten kan bevisas enligt:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1, F_2, F_3) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Att det sista uttrycket blir noll följer av Clairauts sats som gör gällande att en partiell andragsderivata är oberoende av ordningen i vilken man deriverar funktionen, givet att funktionen är av klassen C^2 .

Den andra identiteten säger att ett skalärfälts gradient har rotationen noll. Liksom första identiteten kan även denna bevisas med hjälp av Clairauts sats:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \phi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Den tredje identiteten kan även skrivas $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{F}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{F}) - (\text{grad})^2 \mathbf{F}$. Båda leden i likheten är vektorfält och i syfte att undvika överflödighet presenterar vi beviset för enbart den första komponenten i varje led då beviset är likadant för samtliga komponenter:

$$\begin{aligned}\text{VL}_1 &= [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})]_1 \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{F})_3 - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{F})_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 F_1 \\ &= [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})]_1 - [\nabla^2 \mathbf{F}]_1 \\ &= [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}]_1\end{aligned}$$

v.s.v.

6 Användningsområden/tillämpningar

Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

är fyra partiella differentialekvationer som beskriver och relaterar elektriska fält och magnetiska fält.

Den första ekvationen, så kallad Gauss lag, beskriver hur elektriska laddningar ger upphov till elektriska fält, och kan härledas genom att tillämpa Gauss divergenssats. Antag existensen av en punktladdning Q . Enligt Coulombs lag är då det elektriska fältet $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$. En ytterligare punktladdning q hade då upplevt en kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Tag sedan en sfär K_R av radie R , kring Q i origo $(0,0,0)$. Det elektriska flödet ut genom sfären ges då av

$$\begin{aligned} \iint_{\partial K_R} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \iint_{\partial K_R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{R^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} \iint_{\partial K_R} dS = \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} \text{Area}(\partial K_R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

$\frac{Q}{\varepsilon}$ är konstant för varje laddning Q där ε , som beror på mediet, ej ändrar sig. Det elektriska flödet är således också konstant och oberoende av sfärens radie. Gauss lag säger då att det totala elektriska flödet genom en sluten yta är lika med $\frac{1}{\varepsilon}$ gånger nettoladdningen inom den slutna ytan. Om man antar en kontinuerligt varierande laddningsdensitet $\rho(x,y,z)$ så att $dQ = \rho dV$, ger Gauss lag att

$$\iint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_K \rho dV.$$

På grund av antagandet av en kontinuerligt varierande laddningsdensitet är fältet $\mathbf{E}$ och dess divergens ej längre odefinierat i origo. Således kan Gauss divergenssats tillämpas på $\iint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, vilket ger att

$$\iint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{E} dV.$$

För att $\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{E} dV$ ska vara lika med $\frac{1}{\varepsilon} \iiint_K \rho dV$ krävs att $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, vilket är Maxwells första ekvation.

Maxwells andra ekvation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ konstaterar att divergensen av ett magnetfält alltid är lika med 0. Fysikaliskt tolkas detta som att det ej existerar

magnetiska monopoler. Det finns alltså inga singulära källor som producerar magnetfält, utan det måste alltid finnas par av källor. Allmänt sägs ett vektorfält $\mathbf{F}$ vara källfritt om $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ i hela sin domän. Gauss divergenssats ger då att

$$\oint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_K 0 dV = 0.$$

Flödet ut genom en sluten yta är alltså alltid lika med 0, vilket är logiskt i och med att fältet är källfritt, ty ett nettoflöde ut kan ensdast produceras av källor till flödet inuti.

Faradays induktionslag konstaterar att den inducerade elektromotoriska kraft i varje sluten slinga är lika med den negativa förändringshastigheten av det magnetiska flödet inneslutet av slingan. Matematiskt innebär detta att

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_Y \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Genom att tillämpa Stokes sats samt derivering under integraltecknet kan detta skrivas om så att

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_Y -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Uttrycket innebär att integranderna måste vara lika, vilket ger $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, som är Maxwells tredje ekvation.

Den så kallade Ampères lag beskriver hur magnetiska fält uppstår på grund av elektriska strömmar. Det magnetiska fältet $\mathbf{B}(x, y, z)$, som utanför z -axeln ges av $\frac{\mu I}{2\pi}(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ och är odefinierat på z -axeln, produceras av en konstant ström I i positiv z -led i en oändligt lång och tunn ledare längs z -axeln. Låt nu γ vara en cirkel kring z -axeln, parallellt med xy -planet, genomlöpt moturs sett uppifrån längs z -axeln. Integralen $\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ är då lika med γI . Tag nu en kontinuerlig distribution av strömmar, istället för I , som ges av ett strömfält $\mathbf{J}$. Då fås att

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu \iint_Y \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Stokes sats kan nu tillämpas för att få att

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \mu \iint_Y \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS,$$

vilket medför att $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$. Det är detta som är Ampères lag. För att få den fjärde och sista av Maxwells ekvationer måste denna korrigeras med en liten term för att den ska vara konsekvent med de andra ekvationerna.