

Tavelpresentation

Nicolas Renaudo, Vilhelm Hjert, Roy Ghreizi, Joel Axelsson, Niels Lach

March 2021

1 Gauss Divergenssats

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definerat i en öppen mängd Ω i $\mathbb{R}^3$. Om det kompakta området K har en rand ∂K som består av en eller flera C^1 -ytor och som är orienterad med utåtriktad normal $\hat{\mathbf{N}}$ så gäller

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS. \quad (1)$$

Gauss divergenssats används enligt (1) för att beräkna flödet över en ytintegral definerad av fältet, där ytintegralen måste vara kompakt. För att använda Gauss divergenssats på ett icke-kompakt yta kan man lägga till ett "lock" för att beräkna hela flödet över kroppen, där man sedan subtrahera bort flödet genom locket för att få flödet över den icke-kompakta ytan. Detta demonstreras visuellt av bilden nedan och med funktionen (2).

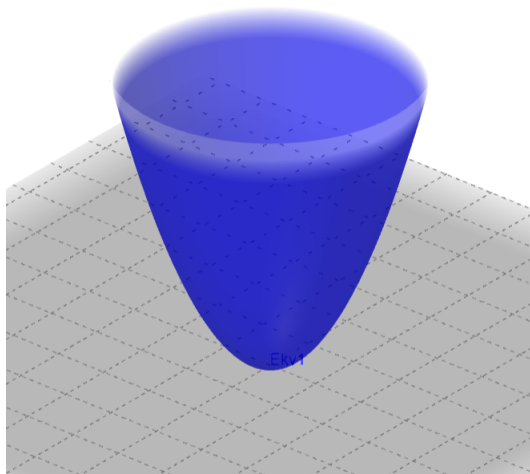


Figure 1: paraboloid med cirkelskiva

$$\iint_{y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} \, dS - \iint_{y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS \quad (2)$$

där den mörkblåa ytan illustrerar ekvationen $y_1 : (x^2 + y^2 = z)$ och den ljusblå ytan en cirkelskiva $y_2 : (x^2 + y^2)$ som skapar en kompakt parabol.

2 Fysikalisk tillämpning av Gauss sats

Kom ihåg Coulombs lag som säger att en punktladdning Q ger upphov till ett kraftfält

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3)$$

där ϵ är mediets elektriska permittivitet och $\hat{\mathbf{r}}$ är en normerad vektor riktad rakt ut från laddningen.

För att koppla till Gauss sats tänker vi oss ett klot med radien R kring Q som är placerad i origo och har en sfär ∂K . Flödet av $\mathbf{E}$ ut ur ∂K blir alltså

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \oiint_{\partial K} \frac{Q}{r^2 4\pi\epsilon} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \, dS = \frac{Q}{r^2 4\pi\epsilon} \cdot \text{Area}(\partial K) = \frac{Q}{\epsilon}. \quad (4)$$

Vi ser därmed att flödet ut ur ∂K endast beror på ϵ och laddningen Q och är oberoende av radien. Detta kan inte direkt kopplas till Gauss sats då $\mathbf{E}$ inte är definierat i origo. Säg nu att vi har en konstant varierande laddningsdensitet $\rho(x, y, z)$ så kan Gauss sats skrivas

$$\oiint_{\partial K} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \frac{1}{\epsilon} \iiint_K \rho \, dV = \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV. \quad (5)$$

Detta ger oss Maxwells 1:a ekvation:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (6)$$

Maxwells 2:a ekvation säger att

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

alltså att divergensen av ett magnetfält $\mathbf{B}$ är lika med noll. Fysikaliskt kan detta beskrivas att det inte finns några magnetiska monopoler och för att ett magnetfält skall uppstå måste det finnas minst två poler.

3 Stokes' sats

I vissa fall kan beräkningen av en kurvintegral förenklas avsevärt med hjälp av Stokes sats som låter en beräkna kurvintegralen genom att beräkna en ytintegral över en yta som har den slutna kurvan som sin rand. Det nya vektorfältet

som ytintegralen beräknas över är rotationen av det ursprungliga fältet. Orienteringen för ytan och randen ska vara sådan att vektorprodukten

$$\mathbf{N} \times d\mathbf{r} \quad (8)$$

av normalen $\mathbf{N}$ till ytan och tangenten $d\mathbf{r}$ till kurvan pekar in mot ytan i varje punkt av kurvan. Satsen kan nu formuleras som följande:

Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält definierat i en öppen mängd Ω i $\mathbb{R}^3$. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med orienterad rand ∂Y så gäller att

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS. \quad (9)$$

Bevisiden går ut på att man antar att ytan Y är sammansatt av funktionsytor. Då integraler är additiva räcker det med att bevisa satsen för en godtycklig funktionsyta och sedan lägga ihop dem. Eftersom vi också valt orientering kommer ränderna för ytorna att sammanfalla med omvända riktningar så att deras kurvintegraler tar ut varandra. Den enda kurvintegralen som blir kvar är den för randen för den fullständiga ytan. Beviset utförs på följande vis:

1. Skriv om vänsterledet i Ekvation (9) på differentialform.
2. Genom att inse att $z = f(x, y)$ kan man skriva om integralen i enbart termer av x och y . Kurvan projiceras således ner på xy -planet och behåller orienteringen.
3. Greens formel används nu för att föra över kurvintegralen i xy -planet till en dubbelintegral över den domän som innesluts av den i xy -planet projicerade kurvan.
4. Med hjälp av kedjeregeln och produktregeln för derivator och förenkling inser man att integranden är en skalärprodukt av rotationen av $\mathbf{F}$ och normalen till funktionsytan. Då $\mathbf{N} dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dx dy$ får man sedan högerledet i Ekvation (9). Domänen vi integrerar över blir nu funktionsytan då vi i slutet utfört ett koordinatbyte.

4 Virvelfritt och konservativt i $\mathbb{R}^3$

Först sammanfattas vad som gäller i $\mathbb{R}^2$. Det görs via två satser:

- **Sats 9.4.4:** Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ & $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ett C^1 -fält. Då gäller att om $\mathbf{F}$ är konservativt är det också virvelfritt.
- **Sats 9.4.5:** Om D är enkelt sammanhängande gäller att om $\mathbf{F}$ är virvelfritt är det också konservativt.

I $\mathbb{R}^3$ finns två motsvarande satser:

- **Sats 10.5.3:** Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ & $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ett $\mathcal{C}^1$ -fält. Då gäller att om $\mathbf{F}$ är konservativt är det också virvelfritt.
- **Sats 10.5.4:** $D \subseteq \mathbb{R}^3$ är en enkelt sammanhängande domän & $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ är ett $\mathcal{C}^1$ -fält. Då gäller att om $\mathbf{F}$ är virvelfritt är det också konservativt.

För att konstruera sats 10.5.4 behövs en ny definition av enkelt sammanhängande som gäller i alla dimensioner.

DEF: En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sägs vara enkelt sammanhängande om:

1. M är bågvisst sammanhängande,
2. varje enkel och sluten kurva i M kan deformeras kontinuerligt till en punkt utan att lämna M .

5 Nablaräkning

I vektoranalysen betecknas nablaoperatoren med den grekiska symbolen ∇ ("nabla"). Nablaräkning fungerar i godtyckligt antal dimensioner med för $\mathbb{R}^3$ är $\nabla = (\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3})$. Nablaoperatorn är ett förkortat skrivsätt för att beteckna vektoriell derivation.

Tre viktiga identiteter inom nablaräkning är:

- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ eller $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0}$ eller $\text{rot}(\text{grad}(\mathbf{F})) = 0$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

Dessa identiteter bevisas genom att utföra nablaberäkningarna på ett godtyckligt vektorfält $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ varpå uträkningarna samt resultaten blir självklara.

Innebörden av den första satsen är att om $\mathbf{F}$ är ett rotationsfält så implicerar det att $\mathbf{F}$ är källfritt. Den andra satsen medför att ett konseervativt vektorfält är virvelfritt. Den tredje satsen är endast en förenkling som till exempel kan vara behjälplig vid uträkningen av $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F})$.