

Matematisk Statistik och Diskret Matematik, MVE051/MSG810, VT21

Timo Vilkas



Chalmers - Göteborgs Universitet

Föreläsning 1
22 mars 2021



Sannolikhetslagar

Vad är sannolikhet?

Vad är sannolikheten för att vinna lotteriet?

Vad är sannolikheten för att det blir soligt imorgon?

Sannolikhet (given som en siffra mellan 0 och 1) är ett mått på hur troligt det är att en viss händelse inträffar:

Antingen utifrån en matematiskt modell (teoretisk) eller erfarenhetsgrundad (relativ frekvens).



T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Definitioner

- **Utfall:** resultat av ett slumpmässigt försök/experiment, s.k. elementarhändelse.
- **Utfallsrummet:** mängden S av alla möjliga utfall.
- **Trädiagram:** ett sätt att beskriva utfallsrummet för stegvisa slumpexperiment (t.ex. med olika omgångar).
- **Händelse:** en samling av utfall, delmängd av S .
- Den tomma mängden kallas den **omöjliga händelsen**, och betecknas med $\emptyset$; S kallas den **säkra händelsen**.
- Två händelser A och B är **disjunkta** (eller **oförenliga**) om $A \cap B = \emptyset$.
- Händelser $A_1, A_2, \dots$ är **parvis disjunkta** (oförenliga) om $A_i \cap A_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$.

Definitioner

- **Utfall:** resultat av ett slumpmässigt försök/experiment, s.k. elementarhändelse.
- **Utfallsrummet:** mängden S av alla möjliga utfall.
- **Trädiagram:** ett sätt att beskriva utfallsrummet för stegvisa slumpexperiment (t.ex. med olika omgångar).
- **Händelse:** en samling av utfall, delmängd av S .
- Den tomma mängden kallas den **omöjliga händelsen**, och betecknas med $\emptyset$; S kallas den **säkra händelsen**.
- Två händelser A och B är **disjunkta** (eller **oförenliga**) om $A \cap B = \emptyset$.
- Händelser $A_1, A_2, \dots$ är **parvis disjunkta** (oförenliga) om $A_i \cap A_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$.

Exempel (Laplace experiment)

Låt oss kasta en tärning.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ är mängden av alla möjliga utfall.

t.ex. 1 är ett utfall, $C = \{1\}$ en elementarhändelse

$A = \{2, 4, 6\}$ skulle vara händelsen att tärningen visar ett jämnt antal ögon

 $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ————— " ————— enist 3 göz.

A och B är inte disjunkta: $A \cap B = \{4, 6\}$, men A och C är disjunkta: $A \cap C = \emptyset$

Exempel

Låt oss kasta två likadana tärningar på en gång.

4. Hallsnumret består av alla par av siffror mellan 1 och 6, dock är de ordnade (då vi inte kan skilja mellan $(1,2)$ och $(2,1)$).

$$S = \{(i, j), 1 \leq i \leq j \leq 6\} = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 2), (2, 3), \dots, (2, 6), \dots, (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

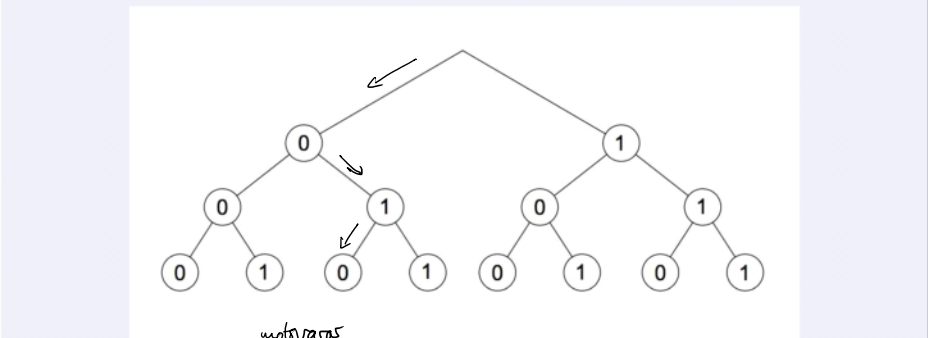
OBS: Dessa utfall är inte av samma sort: Det finns två kombinationer ("1,2" och "2,1") som sammanfaller till (1,2), dock inte för par med samma siffror som t.ex. (3,3) $\Rightarrow$ inget Laplace-experiment!

Exempel (Trädiagram)

Ett mynt kastas 3 gånger.

Klave betecknas med 0 och krona med 1.

Utfallsrummet kan representeras genom ett träd:

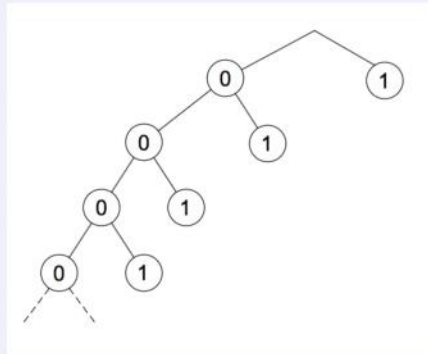


motivas

$$S = \{000, 001, \textcircled{010}, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

Exempel

Myntet kastas tills krona dyker upp för första gången.



$$S = \{1, 01, 001, 0001, \dots\}.$$

Kombinatorik

För att kunna hantera sannolikheter på ändliga utfallsrum, är det viktigt att kunna beräkna antalet av elementarhändelser. Teorin bakom det – att räkna fram alla olika kombinationer – ingår i området som kallas **kombinatorik**.

Kombinatorik - Multiplikationsprincipen

Antag att ett slumpexperiment sker i k steg. Låt n_j vara antalet möjliga utfall i steg $j \in \{1, \dots, k\}$. Utan vidare restriktioner ges då antalet utfall för hela experimentet som $\prod_{j=1}^k n_j = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

Exempel

På en fest var 8 herrar och 9 damer bjudna. Om herrarna dansar enbart med damerna och damerna enbart med herrerna kan vi bilda olika danspar.

Tre knep nämns i "Guidelines for Using the Multiplication Principle" (s.11 i boken):

- Observera om repetition är tillåten eller inte.
- Ibland är det lättare att räkna komplementhändelsen $A' = S \setminus A = \{s \in S; s \notin A\}$
- Om det finns restriktioner: fundera över dessa först.



Kombinatorik - Permutation

Hur många tal kan man bilda med siffrorna $\{1, 2, 3\}$ utan att repetera en siffra?

Enligt multiplikationsprincipen finns det $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ möjliga kombinationer:

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$

Definition

En ordning av elementen i en mängd kallas för en **permutation** av elementen i mängden.

För att, i allmänhet, få fram antalet permutationer av $n \in \mathbb{N}$ element, kan man tänka så här:

För plats ett har vi n val. För plats två har vi bara $n - 1$ val, då elementet som står på plats ett redan är taget, osv. Antalet ordningar blir då:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^n i = n!$$

$n!$ kallas **n -fakultet**. 0-fakultet definieras som $0! = 1$.

Sats

Det finns exakt $n!$ permutationer av n (olika) element.

Kombinatorik - ordnade urval

Hur många olika tal med två siffror kan man bilda med siffrorna $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ utan att repetera en siffra?

Enligt multiplikationsprincipen finns det $5 \cdot 4 = 20$ olika tal.

Sats (ordnat urval)

Antalet sätt, ${}_nP_k$, att ordna k element som väljs bland totalt n olika är

$${}_nP_k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$\leftarrow$ antalet ordningar av hela mängden
 $\leftarrow$ antalet ordningar av elementen vi inte valde

Kombinatorik - icke-ordnade urval

Om man drar två kort ur ett kortspel med 52 olika kort, hur många kombinationer finns det då för det dragna paret (om ordningen av korten inte är relevant)?

Enligt multiplikationsprincipen kan vi dra paret på $52 \cdot 51$ sätt.

Dock räknar vi då alla par dubbelt (om jag t.ex. drar kung i hjärter och klöver ess, kan jag dra antingen kungen eller esset först).

Sats (icke-ordnat urval)

Antalet sätt att välja k element från en mängd med n olika element utan hänsyn till ordningen ges av ${}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

${}_nC_k$ kallas **binomial koefficient** och betecknas med $\binom{n}{k}$.

antalet ordningar
av valda element

Exempel

Hur många olika bokstavskombinationer kan man bilda genom att permutera bokstäverna av ordet "MAMMA"?

Först: 5 bokstävers har $5!$ olika ordningar
vi räknar de alla ord $3! \cdot 2!$ gånger (då ett byte av M med M eller A med A inte ändrar ordet). $\rightarrow \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{120}{12} = 10$
olika bokstavs kombinationer.

Om en mängd har n objekt av k olika typer, där det finns n_1 stycken av typ 1, n_2 stycken av typ 2, osv., så att $n_1 + \dots + n_k = n$, ges antalet permutationer av elementen av

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

↑
antalet permutationer av mina n_1 stycken av typ 1 (som inte ändrar något)

Sannolikhet

En sannolikhet är ett tal mellan 0 och 1 som beskriver hur troligt det är att en händelse inträffar. Om händelsen kallas A , betecknas sannolikheten att A inträffar vanligtvis med $\mathbb{P}(A)$.

- Sannolikheten av den omöjliga händelsen är 0, dvs. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Om sannolikheten för händelsen A är nära 0 betyder det att A mest troligen inte inträffar i ett försök.
- Sannolikheten av den säkra händelsen är 1 ($\mathbb{P}(S) = 1$). Om sannolikheten för A är nära 1 betyder det att A mest troligen inträffar i ett försök.

Frekventistisk Approximation

Om man repeterar ett slumpexperiment många gånger i oberoende försök (utfallen i olika ronder har ingen effekt på andra omgångar) kan sannolikheten för en händelse A approximeras enligt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n},$$

där n är antalet försök och n_A är antalet gånger bland dem för vilka A inträffade.

När n är stor blir approximeringen mer noggrant (Stora talens lag).

Exempel

Följande tabell redovisar utfallen av 10 kast med en tärning. Man är intresserad av händelsen $A = \text{"Kastad tärning visar sex ögon"}$.

Försök	Resultat (antal ögon)	Händelse A	Relativ frekvens
1	5	Nej	0/1
2	6	Ja	1/2
3	2	Nej	1/3
4	3	Nej	1/4
5	4	Nej	1/5
6	4	Nej	1/6
7	1	Nej	1/7
8	6	Ja	2/8
9	5	Nej	2/9
10	1	Nej	2/10

Om vi kastar tärningen många gånger, så ser vi att den relativa frekvensen ligger nära $\frac{1}{6}$.

Kolmogorovs axiom för sannolikheter

Låt S vara ett utfallsrum, och $A, A_1, A_2, \dots$ godtyckliga händelser.

- 1 $\mathbb{P}(A) \geq 0$
- 2 $\mathbb{P}(S) = 1$
- 3 Om $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ är parvis disjunkta händelser ($A_i \cap A_j = \emptyset$ för $i \neq j$) så gäller

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$$

Laplace experiment

Antag att vi har ett slumpmässigt försök med ändligt många möjliga utfall, sådant att alla utfall i S är lika troliga. Man säger då att sannolikheten är likformigt fördelad. Sannolikheten att händelsen A inträffar ges då av

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|},$$

där $|M|$ betecknar antalet element i mängden en mängd M ("antalet utfall då A inträffar genom antalet möjliga").

Exempel

I förgående exempel var $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$
(tärningskast, A : utfallet jämnt)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \text{OBS: Så får man bara räkna för Laplace experiment!}$$

Navigation icons

Räkneregler

S utfallsrum, $A, B \subseteq S$ händelser.

- **Komplement:** Komplementhändelsen till A är händelsen $A' = "A \text{ inträffar inte.}"$ (och betecknas med A' , $\bar{A}$ eller A^c)

$$\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A).$$



- **Additivitet** Om A och B är disjunkta så gäller (utifrån ③ för bara två händelser)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B). \quad \Rightarrow 1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cup A') = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A')$$

Detta medför också att det gäller för $A \subseteq B$: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B)$, alltså $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (monotoni)

- **Additionsatsen** För godtyckliga händelser A, B gäller $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

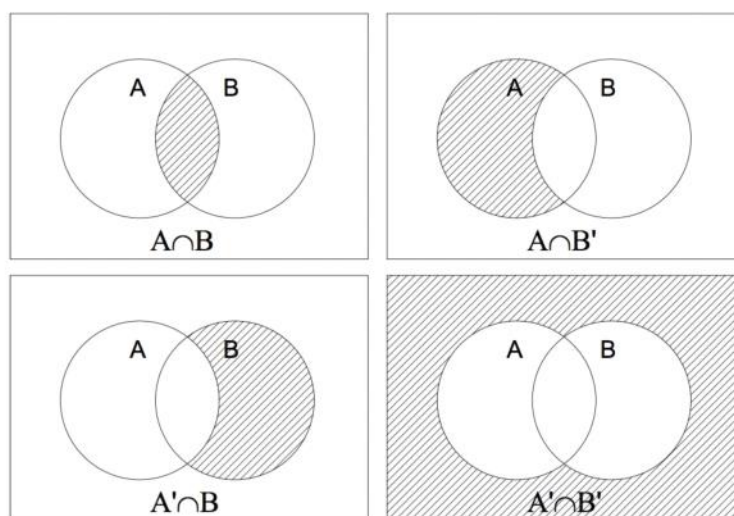
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Additivitet ger (då $A \cap B$ och $A \cap B'$ samt B och $A \cap B'$ är disjunkta):

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B')) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B')$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B \cup (A \cap B')) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Navigation icons



Det här
(så-kallade
Venn diagram)
hjälpes ofta att
visualisera
snitt mängder /
komplement /
unioner av
två (eller fler)
mängder.

De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Exempel

Vi kastar en tärning. A = "utfallet är jämnt" och B = "visar fler än 2 ögon". Beräkna $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cap B')$, $\mathbb{P}(A' \cap B)$ och $\mathbb{P}(A' \cap B')$.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A' = \{1, 3, 5\}, B' = \{1, 2\}, A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \text{ osv.}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B') = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A' \cap B) = \mathbb{P}(\{3, 5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(A' \cap B') = \mathbb{P}((A \cup B)') = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

Betingad sannolikhet

Exempel

I en tillverkningsprocess för en viss produkt kontrolleras kvaliteten, och en produkt klassificeras, för enkelhets skull, som antingen "duglig" eller "defekt". Man har data tillgängligt både för en maskin i processen av äldre typ och en av nyare slag, se tabellen nedan. Totalt valdes ut 300 produkter slumpmässigt.

	Duglig	Defekt	Totalt
Äldre maskin	170	10	180
Ny maskin	115	5	120
Totalt	285	15	300

Exempel

A = "Slumpvis produkt är duglig".

B = "Slumpvis vald produkt är tillverkad med äldre maskin".

C = "Slumpvis vald produkt är duglig, givet tillverkad med äldre maskin."

$$\mathbb{P}(A) = \frac{285}{300}, \mathbb{P}(B) = \frac{180}{300}$$

Händelsen C involverar såväl A som B , och vi skriver $C = A|B$, där $A|B$ utläses som "A, givet B". Från tabellen ovan kan vi finna genom avläsning i raden för "Äldre maskin".

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{170}{180} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

restriktion av
utfallsrummet
på en händelse

Betingad sannolikhet

Definition

För två händelser A, B med $\mathbb{P}(B) > 0$ defineras den **betingade sannolikheten** för A , givet att händelsen B inträffar genom

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exempel

Två servrar, A och B , ingår i ett nätverk. Antag att händelserna A och B motsvarar att A resp. B fungerar under en hel, slumpmässigt vald arbetsdag. Från driftstatistik har man funnit följande sannolikheter:

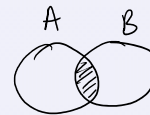
$$\mathbb{P}(A) = 0.90, \quad \mathbb{P}(B) = 0.85, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.80.$$

Nätverket fungerar så länge minst en av serverna fungerar. Vi kan införa händelsen

$$C = \text{"Nätverket fungerar"}$$

och eftersom $C = A \cup B$ har vi

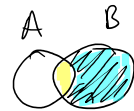
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.95$$



Exempel

Antag nu att vi får en rapport om att server A lagt ner. Hur stor är sannolikheten då att nätverket fungerar denna dag? Den sökta sannolikheten ges av

$$\mathbb{P}(C|A') = \frac{\mathbb{P}(C \cap A')}{\mathbb{P}(A')} \stackrel{C=A \cup B}{=} \frac{\mathbb{P}((A \cup B) \cap A')}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A')}{1 - \mathbb{P}(A)}$$



Obs: $(B \cap A') \cup (B \cap A) = B$ samt $B \cap A' \subseteq A'$ och $B \cap A \subseteq A$ är disjunkta $\Rightarrow$

$$\underbrace{\mathbb{P}(B)}_{0.85} = \underbrace{\mathbb{P}(B \cap A')}_{0.05} + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap A)}_{0.8}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B \cap A') = 0.05 \Rightarrow \mathbb{P}(C|A') = \frac{0.05}{0.1} = \frac{1}{2}.$$

Multiplikationsregel och Bayes sats

även när $\mathbb{P}(A)=0$ eller $\mathbb{P}(B)=0$ då det som är odef. då jämföras med en nolla.

Sats

För två händelser A, B gäller

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).$$

Bevis: w
def.

Med det kan man skriva den betingade sannolikheten som:

Sats (Bayes)

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Bevis: högerled = $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

Oberoende händelser

Antag att informationen att B inträffat inte har någon betydelse beträffande om A har inträffat eller ej, då gäller $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Multiplikationsregeln blir då: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Sats

A och B är oberoende om och endast om

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Bevis: Direkt ur definitionen av betingade sannolikheter.

Det är ekvivalent att säga att A och B är oberoende med att $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ifall $\mathbb{P}(B) \neq 0$ eller med att $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ ifall $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

Exempel

I en gruva finns det två pumpar A och B som antas fungera oberoende av varandra. Verksamheten kan upprätthållas så länge minst en pump fungerar. Vi inför händelserna

A = "Pump A fungerar en slumpvis vald dag"

B = "Pump B fungerar en slumpvis vald dag".

Vi vet att $\mathbb{P}(A) = 0.9$ och $\mathbb{P}(B) = 0.95$.

Sannolikheten att verksamheten inte störs en slumpvis vald dag är

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \stackrel{A, B \text{ oberoende}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0.995$$

Bayes formel

Exempel

I en industrilokal finns ett brandlarm. Det är förhållandevis pålitligt, men ibland sker falsklarm och en brand kan även missas. Låt B = "Brand i lokalen" och L = "Larm ljuder" har motsvarande sannolikheter $\mathbb{P}(B) = 0.05$ och $\mathbb{P}(L|B) = 0.98$, och $\mathbb{P}(L|B') = 0.10$. Beräkna $\mathbb{P}(B|L)$.

$$\mathbb{P}(L|B') = \frac{\mathbb{P}(L \cap B')}{\mathbb{P}(B')} \quad \text{och} \quad \mathbb{P}(L|B) = \frac{\mathbb{P}(L \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{enligt def.}$$

$$\mathbb{P}(B) = 0.05, \quad \mathbb{P}(B') = 1 - \mathbb{P}(B) = 0.95$$

$$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(B \cap L) + \mathbb{P}(B' \cap L) = \mathbb{P}(L|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(L|B') \cdot \mathbb{P}(B') \\ = 0.98 \cdot 0.05 + 0.10 \cdot 0.95 = 0.144$$

Slutligen är

$$\mathbb{P}(B|L) = \frac{\mathbb{P}(B \cap L)}{\mathbb{P}(L)} = \frac{0.049}{0.144} \approx 0.34 \quad \text{slh. att det brinner, givet att larmet ljuder.}$$

det är vid närmare betraktning Bayes formel vi använder (se nästa sida)

Total sannolikhet och Bayes formel

Låt $A_1, A_2, \dots, A_n$ vara en partition av S (dvs. parvis disjunkta händelser vars union är hela S) och B en händelse med $\mathbb{P}(B) > 0$. Då gäller följande:

Sats

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i). \quad (\text{gäller även när } \mathbb{P}(B) = 0)$$

Beris: $B \cap A_i, i=1, \dots, n$, är parvis disjunkt och deras union är B .

Sats (Bayes formel)

För varje $A_j, j = 1, \dots, n$, är

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i)}.$$

är ej def. för $\mathbb{P}(B) = 0$

Beris: Skriv om alla betingade sannolikheter med hjälp av definitionen, använd satsen ovan och förenkla.

