Matematisk Statistik och Diskret Matematik, MVE051/MSG810, VT21

Timo Vilkas

Chalmers - Göteborgs Universitet

Föreläsning 12
11 maj 2021

Partialbråksuppdelning

När det gäller att hantera genererande funktioner är det ofta betydligt enklare att addera än att multiplicera två sådana. Därför är partialbråksuppdelning (att skriva om ett bråk med en produkt i nämnaren till en summa med enklare nämnare) ett viktigt verktyg:

Exempel

Skriv $\frac{2x+1}{(x-4)(x+2)}$ som en summa av enklare bråk.

- Tolkuserar på nämnaren: $\frac{1}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$
- $\frac{2x+1}{(x-4)(x+2)} = \frac{2x+1}{6}\left[\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2}\right] = \frac{2x+1}{6}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right]$

→ geometriska summor

Partialbråksuppdelning

- Vi fokusserar på nämnaren.
- För varje linjärfaktor ställer vi upp en summand.

t.ex. $\frac{1}{(x+7)(x-3)(x-5)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-5}$ $(A,B,C \in \mathbb{R})$

- För högre potenser av linjärfaktorer: en summand för varje potens.

t.ex. $\frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)}$

- För faktorer av grad två ska det stå $Ax + B$ i täljaren.

t.ex. $\frac{1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}$

- För högre potenser av kvadratiska faktorer: en summand för varje potens.

t.ex. $\frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)}$ $(A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R})$

Rekursionsekvationer

Genererande funktionen till en talföljd $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ges av

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Genererande funktioner kan också med fördel användas för att lösa rekursiva ekvationer. För att illustrera metoden, låt oss kika på ett exempel:

Exempel

Låt $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ vara en talföljd som uppfyller följande ekvationer $a_0 = a_1 = 0$ och $a_{k+1} = 8\,a_k + 9 \cdot 10^{k-1}$ för $k \geq 1$. Vi vill gärna hitta en explicit formel för a_k och kan göra det med hjälp av verktyget *genererande funktion*.

- $a_2 = 8 \cdot \underset{=0}{a_1} + 9 \cdot 10^0 = 9$
- $a_3 = 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10^1 = 162$
- $a_4 = 8 \cdot 162 + 9 \cdot 10^2 = 2196$

Exempel

Först gångrar vi båda sidor av rekursionen med x^{k+1} och sedan adderar ihop alla ekvationer, vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1} = 8\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1} + 9\sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1}x^{k+1}$$

$$= 8x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + 9x^2\sum_{k=0}^{\infty}(10x)^k$$

$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = f(x)$, då $a_0 = a_1 = 0$; $= f(x)$, då $a_0 = 0$; $= \frac{1}{1-10x}$

Då $a_0 = a_1 = 0$ blir det omedelbart en rekursionsekvation för den genererande funktionen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$:

$$f(x) = 8x \cdot f(x) + \frac{9x^2}{1-10x}.$$

Exempel

Löser man ut f fås $f(x) = \frac{9x^2}{(1-8x)\cdot(1-10x)}$.

Partialbråksuppdelning i form av $\frac{1}{(1-8x)\cdot(1-10x)} = \frac{A}{1-8x} + \frac{B}{1-10x}$ leder till $A = -4$, $B = 5$

$= \frac{5}{1-10x} - \frac{4}{1-8x}$

Vi vet att $\frac{1}{1-10x} = \sum_{k=0}^{\infty}(10x)^k$ och $\frac{1}{1-8x} = \sum_{k=0}^{\infty}(8x)^k$ (för tillräckligt litet $|x|$)

Använder vi våra kunskaper om geometriska summor ser vi att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 9x^2\left[-4\sum_{k=0}^{\infty} 8^k x^k + 5\sum_{k=0}^{\infty} 10^k x^k\right]$$

En enkel jämförelse av koefficienter ger $a_k = 45 \cdot 10^{k-2} - 36 \cdot 8^{k-2}$ för $k \geq 2$.

Nu undrar du kanske vad det skulle ha för tillämpning. Men det finns faktiskt situationer "i verkligheten" där sådana rekursioner dyker upp. Skulle man t.ex. någon gång fundera över hur många (positiva) heltal som består av (exakt) k siffror och ett udda antal nollor, förs man till en rekursion:
Låt a_k stå för antalet positiva heltal med k siffror utav vilka ett udda antal är nollor.
Ur observationen att det totalt finns 10^k positiva heltal med upp till k siffror följer att det finns $10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}$ positiva heltal med exakt k siffror.
Funderar man över vad som återstår när sista siffran stryks i ett tal med $k+1$ siffror och ett udda antal nollor, så är det antingen ett tal med k siffror och ett udda antal nollor (om sista siffran var 1-9) eller ett jämnt antal nollor (om sista siffran var en 0:a).
Detta leder till rekursionen $a_{k+1} = 9 \cdot a_k + 1 \cdot (9 \cdot 10^{k-1} - a_k) = 8a_k + 9 \cdot 10^{k-1}$
Tillsammans med $a_1 = 0$ landar vi i exemplet ovan. # med siffror och jämnt # nollor

Fibonacci talen

Exempel

En mycket känd talföljd är Fibonacci talen som uppfyller $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ samt $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för $n \geq 2$. Samma strategi som ovan ger en rekursion för den genererande funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = f(x) \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = f(x)$$

alltså $f(x) - x = (x + x^2) f(x)$, vilket leder till

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad \text{(för } |x| \text{ tillräckligt litet).}$$

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Fibonacci talen

Exempel

Nollställen till nämnaren ges av $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Med $\varphi := -x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\psi = -x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ följer $-(x+\varphi)(x+\psi) = 1 - x - x^2$. Dessutom gäller $\varphi\psi = -1$, vilket medför $\frac{1}{\varphi} = -\psi$ samt $\frac{1}{\psi} = -\varphi$ (räkna själv!)
Partialbråkuppdelningen leder till

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{x}{\varphi\psi(x+\varphi)(x+\psi)} = \frac{x}{\varphi\psi}\left(\frac{1/\sqrt{5}}{x+\psi} + \frac{-1/\sqrt{5}}{x+\varphi}\right)\\ &= x\left(\varphi\frac{1/\sqrt{5}}{1-\varphi x} - \psi\frac{1/\sqrt{5}}{1-\psi x}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi x\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi x)^n - \psi x\sum_{n=0}^{\infty}(\psi x)^n\right).\end{aligned}$$

Fibonacci talen

Exempel

Vi har kommit fram till

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi x)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(\psi x)^n\right).$$

En enkel koefficentjämförelse levererar $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ för alla $n \geq 1$.

Anmärkning:

- $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$ kallas det **gyllene snittet** (för en annan anledning).
- Då $\psi < 1 < \varphi$ gäller för stora n: $F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Definition

För en talföljd $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definerar vi den **exponentiella genererande funktionen** *(eng. exponential generating function)* som

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Den har i allmänhet en större så kallad konvergensradie än den vanliga genererande funktionen.

Exempel

Hur många strängar på fyra bokstäver kan bildas ur alfabetet $\{a, b, c, d\}$ om det ska vara ett jämnt antal a, högst tre b och ett udda antal c?

Exempel

Som förr kan vi bilda den vanliga genererande funktionen
$f(x) = (1+x^2+x^4)(1+x+x^2+x^3)(x+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$
$= x + 2x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 12x^5 + \ldots$ och dra slutsatsen att det finns 8 (= koeff. av x^4) stycken val när det gäller symbolerna: *aabc*, *aacd*, *bbbc*, *bbcd*, *bccc*, *bcdd*, *cccd*, *cddd*.
Beroende på valet finns det dock olika många sätt att ordna dem, t.ex. $\binom{4}{1,3} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$ för *cddd* och $\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$ för *aabc*.

Ett sätt att fläta ihop både sammansättning och ordning är att betrakta de exponentiella genererande funktionerna istället:
$g(x) = (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(x+\frac{x^3}{3!})(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})$.
Då bidrar *aabc* till termen av fjärde potens i $g(x)$ nämligen med $\frac{x^2}{2!}\cdot x \cdot x = \binom{4}{2,1,1}\frac{x^4}{4!}$ och *cddd* med $x \cdot \frac{x^3}{3!} = \binom{4}{1,3}\frac{x^4}{4!}$.

Koefficienten a_4 framför $\frac{x^4}{4!}$ i $g(x)$ är $\frac{8}{3}\cdot 4! = 64$, som är svaret på vår fråga ovan.

Symbolsträngar

Sats

Antag att det finns n olika symboler. Låt $M_i \subseteq \mathbb{N}$ vara mängden av tillåtna antal som symbol nummer i får förekomma, $1 \leq i \leq n$. Låt $g_i(x) = \sum_{k \in M_i} \frac{x^k}{k!}$ och

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_n(x) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Då anger koefficienten a_k antalet strängar av längd k som innehåller $k_i \in M_i$ symboler av typ i ($k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$).

Bevis: Precis som i exemplet ovan ges koeff. av x^k i $g(x)$ som $\sum_{\substack{k_1 \in M_1, \ldots, k_n \in M_n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ alltså $a_k = \sum_{\substack{k_1 \in M_1, \ldots, k_n \in M_n \\ k_1 + \ldots + k_n = k}} \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!}$, där $\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n ; k_1 \in M_1, \ldots, k_n \in M_n, k_1 + \ldots + k_n = k\}$ är alla olika sätt att välja k symboler, under de givna restriktionerna, och $\binom{k}{k_1, \ldots, k_n} := \frac{k!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!}$ är antalet olika ordningar per val. □.

Vanliga exponentiella genererande funktioner

1. $a_k = 1$ för alla $k \in \mathbb{N}_0$ ger $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$
2. $a_k = c^k$ för $c \in \mathbb{R}$ ger $e^{cx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{k!} = 1 + cx + \frac{(cx)^2}{2!} + \ldots$

   t.ex. $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$.
3. $a_k = 1$ för jämna k och $a_k = 0$ för udda k ger

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

4. $a_k = 0$ för jämna k och $a_k = 1$ för udda k ger

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$