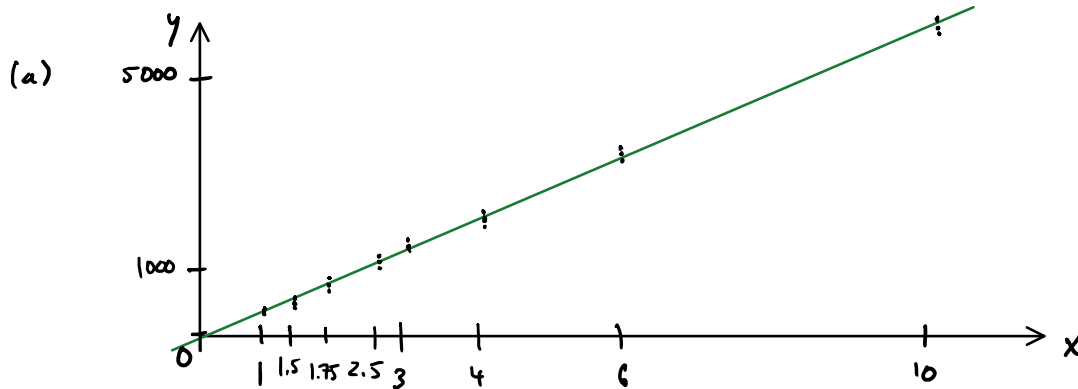


Ex. 11.10

$$(b) \quad \sum_{i=1}^{24} x_i = 89.25, \quad \sum_{i=1}^{24} y_i = 46720, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{24} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{24} x_i y_i = 272800.75, \quad \sum_{i=1}^{24} x_i^2 = 520.6875, \quad n = 24$$

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{24} x_i y_i - \sum_{i=1}^{24} x_i \sum_{i=1}^{24} y_i}{n \sum_{i=1}^{24} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{24} x_i)^2} = \frac{2377458}{4530.9375} \approx 524.72$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = -4.62$$

$$y = b_0 + b_1 x = 524.72 \cdot x - 4.62$$

- (c) $y(3.45) \approx 1806$ (eg. skattning på $\mu_{Y|X}$ inte $Y|X$ dock är fördelningen av $Y|X$ ganska koncentrerad kring väntevärdet här verkar det som)

Övnings tenta

u1

(a) $\frac{7!}{2!}$ (ordnat urval av 5 utav 7)

$\binom{7}{5} \cdot 5! = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 5! = \frac{7!}{2!} = 2520$ sätt att sätta
↑
ordningen på valda platserna

(b) Det finns 3 sätt att välja 2 tomma platser i kanten.

Svar: $3 \cdot 5! = 360$

(c) 1 (b) är motsvarande slh. 1,

i (a) $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} \leftarrow$ sätt att välja tomma platser utan 3 mellersta
 $\binom{7}{2} \leftarrow$ sätt att välja tomma platser
 $= \frac{2}{7}$

u2

täthetsfunktion $f(x) = c \cdot e^{-|x|}$

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2c \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

(b) $m_x(t) = \mathbb{E} e^{tx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx$

$\int_{-\infty}^0 e^{tx} \cdot e^x dx = \int_{-\infty}^0 e^{(t+1)x} dx = \left[\frac{e^{(t+1)x}}{t+1} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{t+1} \quad [t > -1]$

$\int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx = \left[\frac{e^{(t-1)x}}{t-1} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{t-1} \quad [t < 1]$

$\Rightarrow m_x(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{t^2-1} \right) = -\frac{1}{t^2-1} \quad [t \in (-1, 1)]$

(c) $m'_x(t) = (t^2-1)^{-2} \cdot 2t = \frac{2t}{(t^2-1)^2}$

$m''_x(t) = \frac{2(t^2-1)^2 - 2t \cdot 2 \cdot (t^2-1) \cdot 2t}{(t^2-1)^4} = -\frac{6t^2+2}{(t^2-1)^3}$

$\mathbb{E} X = m'_x(0) = 0$

$\mathbb{E} X^2 = m''_x(0) = 2, \quad \text{var}(X) = \mathbb{E} X^2 - (\mathbb{E} X)^2 = \mathbb{E} X^2 - 0^2 = 2$

43

$$f(x,y) = \frac{x}{3y} \quad \text{för alla } x,y \in \{1,2,3,4\} \text{ som uppfyller } x \leq y$$

$$(a) \quad P(Y=3) = f_Y(3) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{XY}(x,3)}{f_Y(3)} = \frac{\frac{x}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{x}{3} \quad \text{för } x \in \{1,2\}$$

$$(b) \quad P(X \leq 2 | Y > 2) = \frac{P(X \leq 2, Y > 2)}{P(Y > 2)} = \frac{7/12}{5/6} = \frac{7}{10}$$

$$P(Y > 2) = P(Y=3) + P(Y=4) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \right) = \frac{5}{6}$$

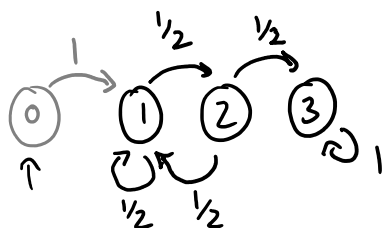
$$\begin{aligned} P(X \leq 2, Y > 2) &= P(X=1, Y=3) + P(X=1, Y=4) + P(X=2, Y=3) + P(X=2, Y=4) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$(c) \quad P(X=2, Y=2) = 0 \neq P(X=2) \cdot P(Y=2) = \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{12} \right) \cdot \frac{1}{6} > 0$$

→ Nej, inte oberoende.

44

(a) $S = \{1, 2, 3\}$ där t.ex. 2 betyder att det som kom sist kom två gånger på rad



$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d = N \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{anger hur många steg från transient tillstånd till absorption}$$

Svar: $d_1 + 1 = 7$ omgångar i väntande tills spelet är slut.

47

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 + x + x^2 + x^3) (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) (1 + x + x^2) (1 + x^2 + x^4) \\ &= x + 3x^2 + 7x^3 + 12x^4 + 18x^5 + 23x^6 + \dots + 3x^{13} + x^{14} \end{aligned}$$

Antalet sätt att välja 5 bollar under givna restriktionerna är koef. framför x^5 i $g(x)$ alltså 18.

(45)

$$(a) \sum_{i=1}^{10} x_i = 300.2 \quad \text{alltså} \quad \bar{x} = 30.02 \quad (n=10)$$

$$(b) z_{\alpha/2} = 1.96 \quad \text{för } \alpha = 0.05$$

$\Rightarrow$ ett 95% K.I. för μ med $\sigma = \frac{1}{5}$ ges av

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(30.02 - 1.96 \frac{1/5}{\sqrt{10}}, 30.02 + 1.96 \frac{1/5}{\sqrt{10}} \right) \\ = (29.896, 30.144)$$

$$(c) t_{\alpha/2} = 2.262 \quad (9 \text{ frihetsgrader})$$

$$s^2 = \frac{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)} = \frac{10 \cdot 9012.4 - (300.2)^2}{10 \cdot 9} = 0.044$$

$\Rightarrow$ ett 95% K.I. för μ med okänd σ ges av

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 30.02 \pm 2.262 \cdot \sqrt{\frac{0.044}{10}} = 30.02 \pm 0.15$$

alltså $(29.87, 30.17)$.

(46)

$$(a) \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}} \sim N(0,1) \quad (\text{CGS}), \quad \hat{p} = \frac{1984}{10000}$$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{1}{n} \hat{p}(1-\hat{p})}} \geq -z_{0.99} = -2.326$$

$$\Leftrightarrow p \leq \hat{p} + z_{0.99} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{1984}{10000} + 2.326 \cdot 0.003988 \\ = 0.207676$$

Svar: p ligger i $[0, 0.207676]$ med 99% säkerhet.

$$(b) n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1-\hat{p})}{d^2} = \frac{1.96^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{(0.02)^2} \approx 1537 \quad (\hat{p} = \frac{1}{5})$$

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4d^2} = 2401 \quad (\text{okänd } \hat{p})$$

U8

$$(a) \quad b_1 = \frac{n \sum a_i h_i - \sum a_i \sum h_i}{n \sum a_i^2 - (\sum a_i)^2} = 0.126444193$$

$$b_0 = \bar{h} - b_1 \bar{a} = 1.4653$$

svar: $y = 0.1264x + 1.4653$

$$(b) \quad \begin{array}{l} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{array} \quad \text{teststatistik} \quad T = \frac{B_1 - \beta_1^0}{S/\sqrt{s_{xx}}} \quad (n-2 = 8 \text{ frihetsgrader})$$

$$S^2 = \frac{S_{yy} - B_1 S_{xy}}{n-2} \Rightarrow s^2 = 0.1466$$

$$\text{och } s_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2 = 7164.9$$

$$S_{yy} = \sum y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum y_i)^2 \Rightarrow 115.724 = S_{yy}$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{1}{n} (\sum x_i)(\sum y_i) \Rightarrow 905.96 = S_{xy}$$

$$t = \frac{0.12644}{0.0045} = 27.98 \gg t_{0.025} \quad \rightarrow H_0 \text{ bör förkastas;}$$

2.306

det finns ett linj. samband!

(c) Ett 90% KI för B_0 ges av

$$b_0 \pm t_{0.05} \cdot \frac{s}{\sqrt{n s_{xx}}} \sqrt{\sum x_i^2} = [0.936, 1.994]$$