

MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematisk fördjupning, TMA226

Tentamen: 2019-10-12, 08.30–12.30

Telefonvakt: Filip Wikman, 5325

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: 24 poäng – 3, 36 poäng – 4, 48 poäng – 5

Examinator: Fredrik Ohlsson, 031-772 5305 (Tobias Gebäck, 031-772 3547)

Observera: Beräkningar skall motiveras och redovisas utförligt. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, endast svar ger inga poäng.

1. Bestäm alla $k \in \mathbb{Z}$ för vilka

$$U_k = \left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ b+k \\ a+b+c \\ c-a \end{bmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

utgör ett underrum av $\mathbb{R}^4$. Konstruera för dessa k en bas för U_k och bestäm $\dim U_k$.

(7p)

2. Betrakta vektorrummet $V = C[-\pi, \pi]$ med skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

och låt $\mathcal{F}_2 = \text{Span}\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x)\}$. Bestäm projektionen f_2 av $f(x) = |x|$ på $\mathcal{F}_2$ och avståndet mellan vektorerna f och f_2 . Bestäm också Fourier-serien med period 2π för $f(x)$ och använd den för att beräkna summan till serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

Uttrycken för Fourierkoefficienterna behöver inte härledas.

(8p)

3. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = 2 - x, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Härled *variationsformulering* och *finita element-formulering*, samt beräkna *styvhets- och massmatris* samt *högerledsvektor* för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/4$.

Formulera slutligen det resulterande *linjära ekvationssystemet* (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i styvhets- och massmatriserna behöver ej heller redovisas i detalj om resultatet är känt.

(8p)

4. Låt talföljden $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ vara definierad av $a_1 = b$ och

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bestäm för vilka $b \in \mathbb{R}$ som talföljden konvergerar och beräkna dess gränsvärde. (Tips: Konstruera först talföljden grafiskt med hjälp av kurvorna $y = (x - 1)^2 + 1$ och $y = x$.)

(7p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)} x^k$$

är absolut konvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(8p)

6. Visa att

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-k/x}$$

definierar en kontinuerlig funktion på $(0, \infty)$.

(7p)

7. Låt U vara ett ändligtdimensionellt underrum av ett vektorrum V med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Visa att $\forall u \in V$ existerar entydigt $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$ s.a. $u = u' + u''$, samt att givet ON-bas $\{e_1, \dots, e_k\}$ för U ges u' av

$$u' = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u, e_k \rangle e_k.$$

(8p)

8. Visa att om funktionerna f_n är kontinuerliga och $f_n \rightarrow f$ likformigt på $[a, b]$ så är

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

(7p)

Lycka till!
Fredrik & Tobias