

Matematisk fördjupning, TMA226, Lösningsförslag, 2019-10-12

1. Eftersom U_k är icke-tom mängd utgör U_k underrum av $\mathbb{R}^4$ omm $u + v \in U_k$ och $\alpha u \in U_k$, för godtyckliga $u, v \in U_k$ och $\alpha \in \mathbb{R}$. Med

$$u = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ b_1 + k \\ a_1 + b_1 + c_1 \\ c_1 - a_1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} a_2 + b_2 \\ b_2 + k \\ a_2 + b_2 + c_2 \\ c_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

har vi

$$u + v = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) + 2k \\ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) \\ (c_1 + c_2) - (a_1 + a_2) \end{bmatrix}, \quad \alpha u = \begin{bmatrix} (\alpha a) + (\alpha b) \\ (\alpha b) + \alpha k \\ (\alpha a) + (\alpha b) + (\alpha c) \\ (\alpha c) - (\alpha a) \end{bmatrix}$$

vilket medför att $u + v \in U_k$ och $\alpha u \in U_k$ omm $k = 0$.

För $k = 0$ har vi

$$U_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a + b \\ b \\ a + b + c \\ c - a \end{bmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

med

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vidare gäller att

$$[v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt oberoende $\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ bas för $U_0 \Rightarrow \dim U_0 = 3$.

Svar: U_k underrum av $\mathbb{R}^4$ för $k = 0$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ bas för U_0 och $\dim U_0 = 3$.

2. Vi noterar att $f(x) = |x|$ är jämn funktion. Alltså ges Fourierkoefficienterna av

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \{PI\} \\ &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[\frac{x}{k} \sin kx \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin kx dx = -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{k^2} \cos kx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & , \quad k = 2m - 1 \\ 0 & , \quad k = 2m \end{cases}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin kx \, dx = 0 \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Projektionen av f på $\mathcal{F}_2$ ges av

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{\langle |x|, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} + \frac{\langle |x|, \sin x \rangle}{\langle \sin x, \sin x \rangle} \sin x + \frac{\langle |x|, \cos x \rangle}{\langle \cos x, \cos x \rangle} \cos x \\ &+ \frac{\langle |x|, \sin 2x \rangle}{\langle \sin 2x, \sin 2x \rangle} \sin 2x + \frac{\langle |x|, \cos 2x \rangle}{\langle \cos 2x, \cos 2x \rangle} \cos 2x \\ &= \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x . \end{aligned}$$

Avståndet i kvadrat mellan f och f_2 blir då

$$\begin{aligned} \|f - f_2\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(|x| - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos x \right)^2 dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \left(x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} + \frac{16}{\pi^2} \cos^2 x + \frac{8}{\pi} x \cos x - 4 \cos x \right) dx \\ &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi} \end{aligned}$$

där vi återigen använt att integranden är en jämn funktion och att

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi} x \cos x \, dx &= \{PI\} = \underbrace{[x \sin x]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [\cos x]_0^{\pi} = -2 \\ \int_0^{\pi} \cos x \, dx &= [\sin x]_0^{\pi} = 0 . \end{aligned}$$

Slutligen ges Fourierserien för f av

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) .$$

Eftersom $f(x) = |x|$ är kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$ och särskilt i $x = 0$ konvergerar Fourierserien i $x = 0$ med summa

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} . \end{aligned}$$

Svar: Projektionen av f på $\mathcal{F}_2$ är $f_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x$, avståndet mellan f och f_2 är

$$\|f - f_0\| = \sqrt{\frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi}} \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

3. *Variationsformulering*: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0, 1)$ och integrera över intervallet $[0, 1]$. Partialintegration ger

$$- [u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 2 \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 (2-x)v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in H_0^1(0, 1)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 2 \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 (2-x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, 1)$$

Motsvarande *finita element-problem* för en styckvis linjär finita element-approximation är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ är kontinuerlig och styckvis linjär på } \mathcal{T}_h, \text{ och } \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + 2 \int_0^1 U(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 (2-x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in V_h^0. \quad (1)$$

Diskretisering: Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_{j+1} - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/4, j = 1, 2, 3$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i, i = 1, 2, 3$. Vi får då ekvationssystemet

$$(A + 2M)\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx, i, j = 1, 2, 3$, och M är massmatrisen med element $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_j \varphi_i dx, i, j = 1, 2, 3$. b är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 (2-x)\varphi_i(x)dx, i = 1, 2, 3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

Elementen b_i ges av

$$\begin{aligned} b_i &= \int_0^1 (2-x)\varphi_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (2-x)\frac{x-x_{i-1}}{h}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (2-x)\frac{x_{i+1}-x}{h}dx \\ &= \left[\frac{2-x}{h} \frac{1}{2}(x-x_{i-1})^2 \right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2}(x-x_{i-1})^2 dx + \left[\frac{2-x}{h} \cdot \frac{(-1)}{2}(x_{i+1}-x)^2 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(-1)}{2}(x_{i+1}-x)^2 dx \\ &= \frac{h}{2}(2-x_i) + \frac{1}{6h} [(x-x_{i-1})^3]_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{h}{2}(2-x_i) + \frac{1}{6h} [(x_{i+1}-x)^3]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= h(2-x_i) + \frac{h^2}{6} - \frac{h^2}{6} = h(2-x_i) = h(2-ih) \end{aligned}$$

för $i = 1, 2, 3$.

Beräkning av matriselementen ger då (enligt kursboken)

$$\left(\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 2\frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 2-h \\ 2-2h \\ 2-3h \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/4$,

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 100 & -47 & 0 \\ -47 & 100 & -47 \\ 0 & -47 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/16 \\ 3/8 \\ 5/16 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.1260 \ 0.1564 \ 0.1110)^T$.)

4. Vi noterar först att $a_n > 0$ för $n \geq 2$. Låt

$$f(x) = (x-1)^2 + 1, \ x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2(x-1)$$

Alltså gäller $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ samt $f'(x) < 0$, $x < 1$ och $f'(x) > 0$, $x > 1$, och följaktligen är $f(1) = 1$ ett globalt minimum för $f(x)$. Eftersom $a_{n+1} = f(a_n)$ gäller då att följderna $\{a_n\}_{n=2}^\infty$ är nedåt begränsad, $a_n \geq 1$, men ej uppåt begränsad.

Betrakta nu för $n \geq 2$

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 + 1 - a_n = a_n^2 - 3a_n + 2 = (a_n - 2)(a_n - 1)$$

Alltså gäller att

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 0 & , \quad a_n = 1, 2 \\ a_{n+1} - a_n < 0 & , \quad 1 < a_n < 2 \\ a_{n+1} - a_n > 0 & , \quad a_n > 2 \end{cases}$$

Eftersom $a_{n+1} - a_n < 0$ för $1 < a_n < 2$ och följderna också begränsas nedåt av $a_n \geq 1$ avgörs alltså konvergenssegenskaperna av a_2 . Från $a_2 = f(b) = (b-1)^2 + 1$ följer

$$\begin{cases} a_2 = 1 & \Leftrightarrow & b = 1 \\ 1 < a_2 < 2 & \Leftrightarrow & 0 < |b-1| < 1 \\ a_2 = 2 & \Leftrightarrow & b = 0, 2 \\ a_2 > 2 & \Leftrightarrow & b < 0, b > 2 \end{cases}$$

Vi har alltså följande möjliga fall för olika värden på b :

$b = 1$: $\{a_n\}_{n=2}^\infty = \{1, 1, 1, \dots\}$ konvergent med gränsvärde $a = 1$.

$0 < |b-1| < 1$: $\{a_n\}_{n=2}^\infty$ konvergent ty avtagande och nedåt begränsad. Gränsvärdet a ges av $a = (a-1)^2 + 1 \Rightarrow a = 1$.

$b = 0, 2$: $\{a_n\}_{n=2}^\infty = \{2, 2, 2, \dots\}$ konvergent med gränsvärde $a = 2$.

$b < 0, b > 2$: $\{a_n\}_{n=2}^\infty$ divergent ty växande men ej uppåt begränsad.

Svar: Följderna $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ konvergerar för $b \in [0, 2]$ med gränsvärde $a = 1$ för $b \in (0, 2)$ och gränsvärde $a = 2$ för $b = 0, 2$.

5. Med $a_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$ har vi (för $k \geq 2$)

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\ln(k+1)}{\ln(k+2)} = \frac{\ln k + \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k + \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\ln k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{1 + \frac{1}{\ln k} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

Enligt kvotformeln är då konvergensraden $R = 1$, d.v.s. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent för $|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$. Återstår att undersöka $x = \pm 1$.

$$\underline{x = 1:} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\ln(k+1)}}_{=b_k > 0}$$

Vi har

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(k+1)}{k} = 0 & \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : k > \ln(k+1), \forall k \geq m \\ & \Rightarrow b_k = \frac{1}{\ln(k+1)} > \frac{1}{k}, \forall k \geq m \end{aligned}$$

Eftersom $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent följer då från jämförelsekriteriet för positiva serier att

$\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ också är divergent.

$$\underline{x = -1:} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{1}{\ln(k+1)}}_{=b_k > 0}$$

Eftersom $\ln(k+1)$ är växande och $\ln(k+1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ gäller att följderna $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ är avtagande med $b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Leibniz konvergenstkriterium ger då att den alternerande

serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ konvergerar.

Svar: Absolut konvergent för $|x| < 1$, betingat konvergent för $x = -1$ och divergent för övriga x (d.v.s. $|x| > 1$ och $x = 1$).

6. Vi har $f_k(x) = \frac{1}{x^2} e^{-k/x}$, $x > 0 \Rightarrow \frac{df_k}{dx} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{k}{x} - 2 \right) e^{-k/x}$

Alltså gäller $\frac{df_k}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}$ samt $f_k \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ samt $f_k \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

$\Rightarrow f_k \left(\frac{k}{2} \right) = \frac{4}{k^2} e^{-2}$ globalt max på $(0, \infty)$ för $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow |f_k(x)| \leq \frac{4}{k^2} e^{-2} < \frac{4}{k^2} \quad \forall x \in (0, \infty), k = 1, 2, 3, \dots$$

Med $a_k = \frac{4}{k^2}$ konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Alltså gäller

i) $|f_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in (0, \infty)$ och $k = 1, 2, \dots$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

Weierstrass Majorantsats medför då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-k/x}$ likformigt konvergent på $(0, \infty)$

$\Rightarrow f(x)$ kontinuerlig på $(0, \infty)$ ty $f_k(x)$ kontinuerlig på $(0, \infty)$ för $k = 1, 2, 3, \dots$ ■

7. Se lemma 2.2 och sats 2.7 i Gustafsson & Holmåker.

8. Se sats 19.11 i Eriksson, Larsson & Wahde.