

MATEMATIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Matematisk fördjupning, TMA227/LGMA62

Tentamen: 2020-06-05, 14.00–18.00

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel tillåtna

Betygsgränser TMA227: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5

Betygsgränser LGMA62: 20 poäng – G, 35 poäng – VG

Examinator: Fredrik Ohlsson, 031-772 5305

Beräkningar skall motiveras och redovisas utförligt och fullständigt. Det är i huvudsak beräkningar, resonemang och motiveringar som ger poäng. **Endast svar ger inga poäng.**

Om inte annat anges betecknar $\mathbb{P}_n$ vektorrummet av polynom av grad högst n på $\mathbb{R}$ med de vanliga punktvisa operationerna addition och multiplikation med skalär.

1. Låt $B = \{b_1, b_2\}$ och $C = \{c_1, c_2\}$ vara två baser för ett vektorrum V med $b_1 = 2c_1 + c_2$ och $b_2 = c_1 - c_2$. Låt vidare $F : V \rightarrow V$ var en linjär avbildning vars matrisrepresentation relativt basen B , eller B -matris, ges av

$$[F]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm dimensionen av V samt alla $v \in V$ sådana att $[F(v)]_C = [-1 \quad 1]^T$.

(6p)

2. Låt $F : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ vara definierad av $p(t) \mapsto 3p(t) - p(1 - t)$. Visa att F är linjär och bestäm alla egenvärden och egenfunktioner till F .

(6p)

3. Låt $V = \mathbb{P}_2$ och $U = \{p(t) = a_0 + a_2 t^2 : a_0, a_2 \in \mathbb{R}\}$ på $[0, 1]$ med skalärprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Visa att U utgör ett underrum av V och bestäm ortogonalprojektionerna av funktionen $q(t) = t$ på U .

(6p)

4. Bestäm den talföljd $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ som uppfyller differensekvationen

$$y_{n+2} - 5y_n = 2^n - n$$

samt begynnelsevillkoren $y_0 = -\frac{7}{8}$ och $y_1 = \frac{3}{8}$.

(6p)

5. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar.

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(\frac{k}{k+4} \right) \qquad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \left(\frac{\pi}{k} \right)$$

(6p)

6. Bestäm en potensserie som löser differentialekvationen

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0 \quad , \quad p \in \mathbb{R}$$

och uppfyller $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Bestäm även seriens konvergensradie $R(p)$ som funktion av p .

(7p)

7. Visa att funktionsföljden $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ med $f_k(x) = \ln(x)e^{-x/k}$ konvergerar likformigt på $[1, a]$, där $1 < a < \infty$, och använd detta för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^a \ln(x)e^{-x/k}.$$

(6p)

8. Bestäm Fourierserien med period 2π till $f(x) = |\sin(x)|$ och använd den för att beräkna summan till serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots$$

Uttrycken för Fourierkoefficienterna behöver inte härledas. Integralerna

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \sin(kx) dx &= \frac{\cos(x) \sin(kx) - k \sin(x) \cos(kx)}{k^2 - 1} + C \\ \int \sin(x) \cos(kx) dx &= \frac{k \sin(x) \sin(kx) + \cos(x) \cos(kx)}{k^2 - 1} + C \end{aligned}$$

för $k = 2, 3, 4, \dots$ kan vara användbara.

(7p)

Lycka till!
Fredrik