Affin Mängd

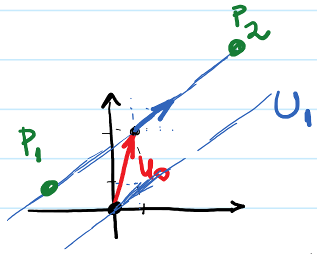
den 22 mars 2021 09:34

HG: sidan 9 Definition 1.3

En delmängd M till V kallas affin, om det finns en vektor $u_0 \in V$ och ett underrum U av V så att

$$M = u_0 \oplus U = \{ u_0 \oplus u : u \in U \} = \{ u_0 + \underbrace{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k}_{u \in U}, \ U = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\} \}$$

Exempel: $V = \mathbb{R}^2$



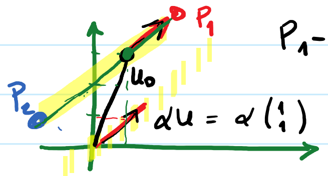
$$M_1 = \{ w = u_0 + u : u \in U_1 = \text{Span}\{(1,1)\} \}$$
$$u_0 = (1,3)$$

$$w = u_0 + \alpha(1,1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ M_1 = linje genom $u_0 = (1,1)$ med riktningsvektor $u = (1,1)$

$$P_1 \in M_1 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 \in M_1 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$P_1 - u_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obs

$$P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\beta - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1$$ igen en vektor i underrum.

och $P_1 - P_2 = (\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Det betyder att $M_1 = \{ w = P_1 + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} =$

$$= \{ w = P_2 + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$
$$= \{ w = u_0 + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

därför att P_1, P_2, u_0 är all punkter på samma linje. (samma affin mängd) många

Då $M = \{ w = p + u : u \in U_1 \}$

$\uparrow$ olika möjlighet att välja punkt p

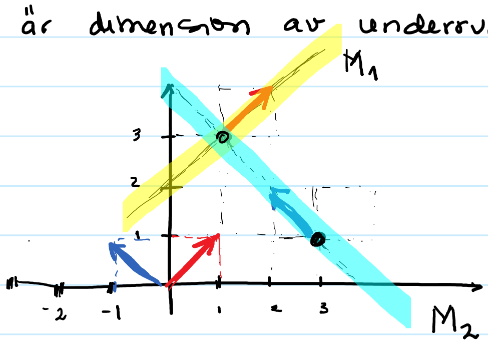
$U_1 = \text{Span}\{(1,1)\}$ ← Här defineras U: riktning vektor är bestämd. bara längd kan variera.

Ex 2. $V = \mathbb{R}^2$. Att tänka på Uppgift 1.14 med $V = \mathbb{R}^2$.

$$M_1 = \left\{ w = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\} = \{ w = p_1 + u, \ u \in U_1 \text{ underrum av } V \}$$

$$M_2 = \left\{ w = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\} = \{ w = p_2 + v, \ v \in U_2 \text{ underrum av } V \}$$

Kan man hitta M som innehåller M_1 och M_2?
Vilken är dimension av underrum som skapar M?



$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 - w_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 - w_1 = -2 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= (\mu - 2) \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 - w_1 \in S = \text{Span}\left\{ \underbrace{(p_2 - p_1)}_{v_0}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\} =$$

$$S = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim S = 1 + 1 = 2$$

Även om vi har $\{v_0, v_1, v_2\}$ 3 olika vektorer att representerar $(w_2 - w_1)$, är de linjärt beroende och $(w_2 - w_1)$ kan skrivas som linjärt kombination av $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ som är linjärt beroende.

Men när vi tänker på en $M \equiv$ affin mängd som kan innehålla M_1 och M_2, betyder det att M skappas med en underrum som har dimension 2.

$$M = \left\{ w = p_1 + a_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ w = p_1 + v : v \in U \subseteq \mathbb{R}^2, \dim U = 2 \right\}$$

Obs $U \subseteq \mathbb{R}^2$ och $\dim U = 2 \Rightarrow U = V = \mathbb{R}^2$.

Obs 2: $M_1 = \left\{ w \in M : p_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, a_2 = 0, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$

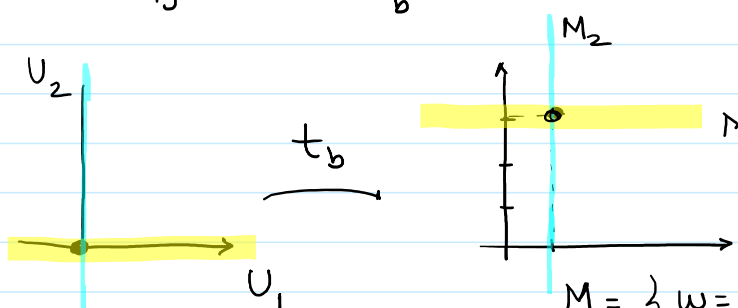
$M_2 = \left\{ w \in M : p_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, a_1 = 0, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Och Nu kan man tänka på en funktion (affin avbildning) avbilda V, med $(0,0)$ som origo till V, med $(3,1)$ som ny origo

$$t_b : V = \mathbb{R}^2 \longrightarrow V = \mathbb{R}^2$$

$$w = (x,y) \longrightarrow t_b(w) = w + b = b + w$$

Ex:



$M_1 = \left\{ w = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}$

$M_2 = \left\{ w = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

t_b fokuserar bara att bytta punkter.

t_b ska inte byta bas.

Men $\text{Värdemäng}(t_b) = \left\{ w = p + u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \right\}$

$U_1 = \text{Span}\{(1,0)\}$, $U_2 = \text{Span}\{(0,1)\}$

$U_1 = \text{Span}\{(1,0)\}$, $U_2 = \text{Span}\{(0,1)\}$

$u_1 = \lambda(1,0)$ $\quad u_2 = \mu(0,1)$

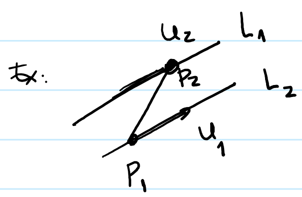
När vi är i $V = \mathbb{R}^3$, hur kan man tänka om affin mängder?

→ alla linje genom $P \neq (0,0,0)$

→ alla planer genom $P \neq (0,0,0)$

Hur kan man skapa nya affina mängder, när vi "summera" 2 dika affina mängder?

Ex:



$L_1 \sim M_1 = \{ w = P_1 + \lambda u_1 \}$

$L_2 \sim M_2 = \{ w = P_2 + \mu u_1 \}$

$\Downarrow$

$$M = \{ w = p_1 + \underbrace{\alpha_0 (P_2 - P_1) + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2}_{} \}$$

$U = \text{Span}\{ (P_2 - P_1), u_1, u_2 \}$ i exempel $L_1 /\!/ L_2 \therefore u_1 /\!/ u_2$

$U = \text{Span}\{ (P_2 - P_1), u_1 \}$ om $L_1 \neq L_2$, då är

$\{ (P_2 - P_1), u_1 \}$ linjärt Oberoende.

Kolla att så kan man fortsätta...

* Viktig → Kommer ihåg vad
- linjär kombination betyder.
- $\text{Span}\{ v_1, \dots, v_n \}$
- linjärt Beroende / Oberoende.

Bara en extra exempel att hälpa till när vi behöver arbeta med Translation: (Bok: Linear Algebra, Stefan Lemurell)

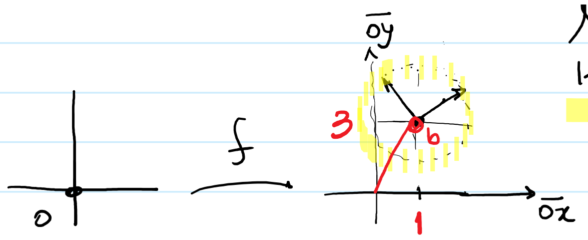
$f: V = \mathbb{R}^2 \longrightarrow V = \mathbb{R}^2$

$u \longrightarrow f(u)$

$f \equiv$ linjär avbildning

Som är en Rotation $\theta = 45^\circ$ moturs

Kring $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Som är en Rotation $\theta = 45°$ moturs kring $P = \binom{1}{3}$

Om man vill hitta lag (formel) till f.

En bra strategy är att använda $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

som är rotationsmatrisen. Men R_θ funkar för Rotation kring ORIGO $O = (0,0)$

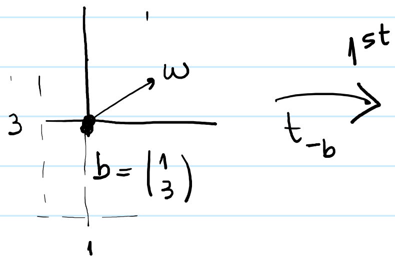
Det betyder att en bra lösning är att:

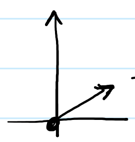
1^{st}: Komma tillbaka till ORigo

2^{nd}: Rotera θ moturs kring origo.

3^{rd}: Gå igen till Punkt $b = (1,3)$

$$f(w) = (t_b \circ R_\theta \circ t_{-b})(w)$$

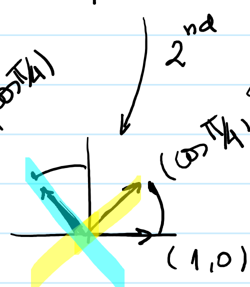




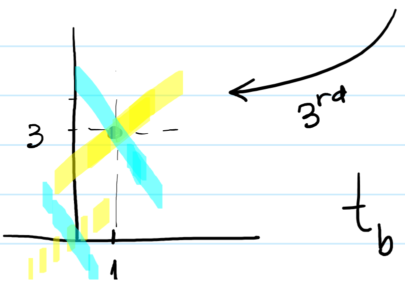
$t_{-b}(w) = w - b = \binom{x-1}{y-3}$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}\right)$

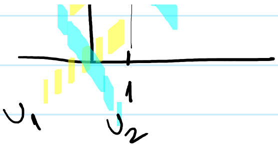
$\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$$R_0(t_{-b}(w)) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-3 \end{bmatrix}$$



$$t_b\left(R_0(t_{-b}(w))\right) = R_0(t_{-b}(w)) + b =$$



$$t_b\left(R_\theta\left(t_{-b}(w)\right)\right) = R_\theta\left(t_{-b}(w)\right) + b =$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left(R_\theta\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(b\right) - R_\theta \cdot \left(b\right)$$

$\uparrow$

$w = (x, y) \in V$, om $go = (0,0)$

OK! Jag hoppas att det kan hjälpa lite.

Vi fortsätta imorgon! Tack för idag.

Alice