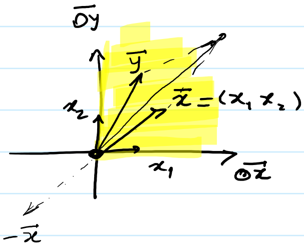
Ö_1_V1_22_mars_2021

den 22 mars 2021 12:29

1.4 Låt $V = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$

- •) gäller $u + v \in V$, $\forall u, v \in V$?
- •) gäller $\alpha u \in V$, $\forall u \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$?
- •) Är V linjärt rum ?



Lösning.

•) $w = \underbrace{u + v} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (\underbrace{x_1 + y_1}_{\geq 0}, \underbrace{x_2 + y_2}_{\geq 0}) \in V$, $\forall u, v \in V$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$

••) $\alpha \geq 0$, $u = (x_1, x_2)$ $\quad \alpha u = (\underbrace{\alpha x_1}_{\geq 0}, \underbrace{\alpha x_2}_{\geq 0})$

Men

$\beta < 0 \quad u = (x_1, x_2) \quad \beta u = (\underbrace{\beta x_1}_{< 0}, \underbrace{\beta x_2}_{< 0}) \notin V$

$\beta u \notin V$ och då uppfyller inte multplication med skalär.

•••) V är ej linjärt rum.

1.8) $\mathbb{P}_n = \{ p(t) \text{ polynom med grad} \leq n \}$

$= \{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n : a_0 \in \mathbb{R}, \dots a_n \in \mathbb{R} \}$

Vilka av delmängder är underrum av $\mathbb{P}_n$.

a) $W = \{ p(t) = a t^2 : a \in \mathbb{R} \}$

Låt $p(t), q(t) \in W$ (godtyckliga elementer)

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\left\{ \begin{array}{l} ?\ p(t) + q(t) \in W\ ? \\ ?\ \alpha p(t) \in W\ ? \end{array} \right.$

→ $p(t) = a t^2$, $q(t) = b t^2$ $\Rightarrow$ $p(t) + q(t) = (a t^2) + (b t^2) = \underbrace{(a+b)}_{c = (a+b)} t^2 = c t^2 \in W$

$\forall p(t), q(t)$

→ $\alpha \in \mathbb{R}$, $p(t) \in W$

$(\alpha p)(t) = \alpha (p(t)) = \alpha (a t^2) = \underbrace{(\alpha a)}_{= k = \alpha a \in \mathbb{R}} t^2 \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall p(t) \in W$

Då är W underrum av $\mathbb{P}_n$.

c) $W = \{ p(t) \in \mathbb{P}_n : p(0) = 0 \}$

$p(t) \in \mathbb{P}_n \Rightarrow \quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

$$\boxed{p(0) = \underline{a_0 = 0}}$$

• ? $p(t), q(t) \in W \Rightarrow p(t) + q(t) \in W$? ✓

•• ? $\alpha \in \mathbb{R},\ p(t) \in W \Rightarrow \alpha p(t) \in W$?

$$\underbrace{(p+q)}(t) = p(t) + q(t) \Big|_{t=0} = \underbrace{p(0)}_{\in W} + \underbrace{q(0)}_{\in W} = 0 + 0 = 0$$

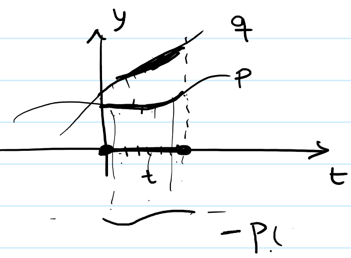
$\forall\, p, q \in W$

•• $(\alpha p)(t) \Big|_{t=0} = (\alpha p)(0) = \alpha(p(0)) = \alpha(0) = 0$

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$
$\forall\, p \in W$

Då är W underrum av $\mathbb{P}_n$.

e) $W = \{ p(t) \in \mathbb{P}_n : \underline{p(t) \geq 0},\ 0 \leq t \leq 1 \}$



Låt $p, q \in W$ och $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $(p+q)(t) = \underbrace{p(t)}_{\geq 0} + \underbrace{q(t)}_{\geq 0} \geq 0$

• $(\alpha q)(t)$
$$\begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow (\alpha p)(t) \geq 0 & \forall\, 0 \leq t \leq 1 \\ \alpha = 0 \Rightarrow 0 \geq 0 \ ✓ & \forall\, 0 \leq t \leq 1 \\ \underline{\alpha < 0} \Rightarrow (\alpha p)(t) < 0 \Rightarrow (\alpha p) \notin W. \end{cases}$$

Då är W inte slutet på multiplication med skalär

och Då är W ej underrum av $\mathbb{P}_n$.

g) $W = \{ p(t) \in \mathbb{P}_n : p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n,\ \underset{i=0,\dots n}{a_i \in \mathbb{Z}} \}$

Låt $p, q \in W$, $\underline{\underline{\alpha \in \mathbb{R}}}$

• $(p+q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + \dots + a_n t^n) + (b_0 + \dots + b_n t^n) =$

$$= \underbrace{(a_0+b_0)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(a_1+b_1)}_{\in \mathbb{Z}}t + \dots + \underbrace{(a_n+b_n)}_{\in \mathbb{Z}}t^n \Rightarrow$$

$(p+q)(t) \in W$, $\forall\, p, q \in W$.

- $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha = \pi \in \mathbb{R}$, $\pi \notin \mathbb{Z}$.

$\pi p(t) = \pi a_0 + \dots + \pi a_n t^n \qquad \pi a_i \notin \mathbb{Z}$.

Då $(\alpha p)(t) \notin W$.

Då är W inte underrum av $\mathbb{P}_n$.

Obs: $\mathbb{P}_2 = \{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_i \in \mathbb{R} \}$

$p(t) \leftrightarrow \underbrace{a_0, a_1, a_2}$ koefficienter $\leftrightarrow (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$

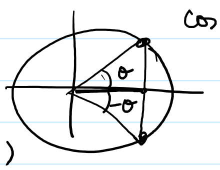
$\mathbb{P}_3(t) = \{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 : a_i \in \mathbb{R} \}$

$p(t) \leftrightarrow \underbrace{a_0\ a_1\ a_2\ a_3} \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$

1.10 ? Är M underrum av V ?

a) $V = C(\mathbb{R})$ $\qquad M = \{ f \in V : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \}$

Låt $f, g \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



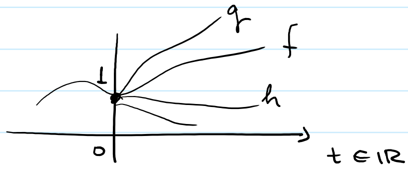
- $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) \underset{\text{Hypotes}}{=} f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ $\quad \forall f, g \in M$.

- $(\alpha f)(-x) = \alpha(f(-x)) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x)$ $\quad (f \in M)$ $\quad \forall f \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Då är M ett underrum av V.

---

c) $V = C[0,1]$ $\quad \underline{M} = \{ f \in V : \underline{f(0) = 1} \}$



Låt $f, g \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

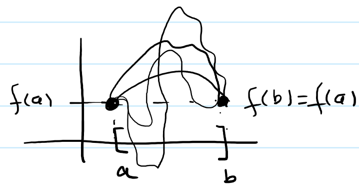
- $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

$$(f+g)(0) = \underbrace{f(0)}_{\in M} + \underbrace{g(0)}_{\in M} = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

$(f+g) \notin M$

Då är M inte underrum av V.

e) $V = C[a,b]$ $\quad M = \{ f \in V : f(a) = f(b) \}$



Låt $f, g \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) = f(b) + g(b) = (f+g)(b)$$

$\forall f, g \in M$.

- $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f)(a) = \alpha(f(a)) = \alpha(f(b)) = (\alpha f)(b)$$

$f \in M$

$\forall f \in M$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Då är M underrum av V.

10. i) $V = C(\mathbb{R})$ $\quad M = \left\{ f \in V : \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f^2(x)}\, e^{-x^2} dx < \infty}\right\}$

Låt $f, g \in M$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{(f+g)(x)} \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(f+g)^2(x)}_{\circledast} e^{-x^2} dx} \underset{\circledast}{<}$$

$$\underbrace{(f+g)^2(x)} \leqslant \underbrace{(f+g)^2(x)} + (f-g)^2(x)$$

$$(f(x)+g(x))^2 + (f(x)-g(x))^2$$

$$\underbrace{f^2(x) + 2\cancel{(fg)}(x) + g^2(x) +} f^2(x) - 2\cancel{(fg)}(x) + g^2(x) =$$

$$f^2(x) + 2\cancel{(fg)}(x) + g^2(x) + f^2(x) - 2\cancel{(fg)}(x) + g^2(x) =$$

$$2f^2(x) + 2g^2(x)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} (2f^2(x) + 2g^2(x))\, e^{-x^2}\, dx =$$

$$2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) e^{-x^2} dx}_{<\infty} + 2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) e^{-x^2} dx}_{<\infty} < \infty$$

$$\bullet\ (\alpha f)(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f)^2(x)\, e^{-x^2} dx = \alpha^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) e^{-x^2} dx}_{<\infty} < \infty$$

Då är M en underrum av V.

1.14 Visa att:

Om M_1 och M_2 är två affina mängder i $\mathbb{R}^n$ med dimension 2 så finns en affin mängd M av dimension ≤ 5 som innehåller M_1 och M_2.

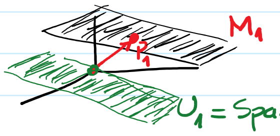
Lösning: Låt M_1 och M_2 vara 2 affina mängder i $\mathbb{R}^n$ med dim 2.

$$M_1 = \{ w_1 = p_1 + u_1 : p_1 \in \mathbb{R}^n \text{ given punkt}, u_1 \in U_1 = \text{Span}\{v_1, v_2\}\}$$

$$M_2 = \{ w_2 = p_2 + u_2 : p_2 \in \mathbb{R}^n \text{ given punkt}, u_2 \in U_2 = \text{Span}\{v_3, v_4\}\}$$

$$w_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}}_{p_1} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix}}_{u_1 \in U_1}$$

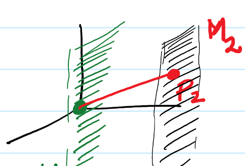
M_1 = plan i $\mathbb{R}^n$ genom punkt p_1



$U_1 = \text{Span}\{v_1, v_2\}$
planet i $\mathbb{R}^n$ genom origo.

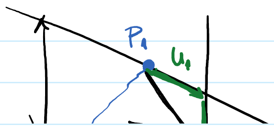
Likadant för M_2

$$w_2 \in M_2 \qquad w_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{p_2} + \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ \vdots \\ v_{3n} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_{41} \\ v_{42} \\ \vdots \\ v_{4n} \end{pmatrix}}_{u_2 \in U_2}$$

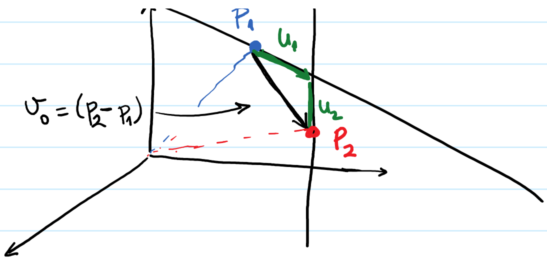


$U_2 = \text{Span}\{v_3, v_4\}$
planet i $\mathbb{R}^n$ genom origo

$V = \mathbb{R}^n$



(i) En möjlighet $\{(p_2 - p_1), u_1, u_2\}$ liniärt beroende



planet i $\mathbb{R}^n$ genom origo

(i) En möjlighet $\{(P_2-P_1), u_1, u_2\}$ linjärt beroende

(ii) Andramöjlighet $\{\underbrace{(P_2-P_1)}_{v_0}, \underbrace{u_1}_{\lambda v_1+\mu v_2}, \underbrace{u_2}_{\alpha v_3+\beta v_4}\}$ linjärt Oberoende

$\text{Span}\{v_0, u_1, u_2\} = \text{Span}\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Det är en underrum S med $\dim S = 5$

$w_1 = P_1 + u_1$

$w_2 = P_2 + u_2$

$\Big\rangle \; w_2 - w_1 = \underbrace{(P_2 - P_1)}_{\text{det är en ny vektor i } \mathbb{R}^n} + u_2 - u_1$

$v_0 = (P_2 - P_1)$

Om (i) händer då $\dim S < 5$

I alla fallen, $\dim S \leq 5$.

$\Downarrow$

Då kan man konstruera en andra

M = affin mängden så att:

$$M = \{ w = P_1 + s : s = a_0 v_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 \in S = \text{Span}\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\} \}$$

$P_1 \in M_1$

$v_0 = (P_2 - P_1) \in \mathbb{R}^n$ vektor

$U_1 = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ $U_2 = \text{Span}\{v_3, v_4\}$

Då M_1 är en delmängd av M, eftersom M_1 kan skrivas som

$$M_1 = \{ w \in M : a_0 = 0, \; a_3 = 0, \; a_4 = 0 \}$$

$$\{ w = P_1 + 0v_0 + \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2}_{\in U_1} + 0 v_3 + 0 v_4 \}$$

Likadant kan man skriver M_2 som en delmängd av M.

$$M_2 = \{ w \in M : a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = 0 \}$$

$$\{ w = \cancel{P_1} + P_2 - \cancel{P_1} + a_3 v_3 + a_4 v_4 \} =$$

$$\{ w = P_2 + \underbrace{a_3 v_3 + a_4 v_4}_{\in U_2} \}$$