Ö_2_V1_23_mars2021

den 23 mars 2021 13:00

HG: kapitel 1: 20 a, 20 c, 23 a, 25, 26

20 a) $M = \{ \text{punkter} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$ M = är ett underrum ?

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3a+b \\ 4 \\ a-5b \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 4 \\ x-5y \end{pmatrix} \quad P_1, P_2 \in M.$$

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 3a+b \\ 4 \\ a-5b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x+y \\ 4 \\ x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b+3x+y \\ 4+4 \\ a-5b+x-5y \end{pmatrix} =$$

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 3(a+x) + (b+y) \\ 8 \\ (a+x) - 5(b+y) \end{pmatrix} \longleftarrow \quad 8 \neq 4.$$

$P_1 + P_2 \notin M$. Då är M ej underrum.

20 c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \\ b \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+x) - (b+y) \\ (b+y) - (c+z) \\ (c+z) - (a+x) \\ (b+y) \end{pmatrix} \in M$$

$$\alpha P_1 = \begin{pmatrix} \alpha(a-b) \\ \alpha(b-c) \\ \alpha(c-a) \\ \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha b \\ \alpha b - \alpha c \\ \alpha c - \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} \in M.$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{a \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{u_1} + b \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{u_2} + c \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{u_3}}_{\text{linjärkombination av } \{u_1, u_2, u_3\}}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

4

$M = \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$ $\quad u_i \in \underline{\mathbb{R}.}$

M är ett underrum av $\mathbb{R}^4$.

<u>Obs:</u> M underrum $\Rightarrow \underbrace{\{0\} \subset M \;/\; 0 \in M}$. $(p \Rightarrow q)$

$\underbrace{0 \notin M} \Longrightarrow M$ är ej underrum $\quad (\sim q \Rightarrow \sim p)$

$P_n = \text{span}\{1, t, \ldots, t^n\}$ $\quad \underbrace{}_{n+1}$

(25) Låt $\underline{P_n} = \{p(t) : p(t) = \cancel{a_0} + a_1 t + \ldots + a_n t^{(n)}, \partial p \leq n\}$

$P_1, P_2, P_3 \ldots P_{n+1}$ har nollsätte i ongo. dvs $\underline{p_i(0) = 0}$ $\quad i = 1 \ldots, n+1$

Visa att $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}\}$ är linjärt beroende.

Lösning:

$$P_1(t) = a_{1n} t^n + a_{1n-1} t^{n-1} + \ldots + a_{12} t^2 + a_{11} t + \underline{\underline{0}}$$

$$P_2(t) = a_{2n} t^n + a_{2n-1} t^{n-1} + \ldots + a_{22} t^2 + a_{21} t + 0$$

$$\vdots$$

$$P_n(t) = a_{nn} t^n + a_{nn-1} t^{n-1} + \ldots + a_{n2} t^2 + a_{n1} t + 0$$

$$P_{n+1}(t) = \underbrace{a_{n+1\,n}} t^n + a_{n+1\,n-1} t^{n-1} + \ldots + a_{n+1\,2} t^2 + a_{n+1\,1} t$$

Då behöver visa att

$$\alpha_1 P_1(t) + \alpha_2 P_2(t) + \ldots + \alpha_n P_n(t) + \alpha_{n+1} P_{n+1}(t) = \underbrace{0}_{\underbrace{0t^n + \ldots + 0t}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Noll polynomio av grad n. med $a_0 = 0$.

Då har vi ekvationssystemet:

$$\alpha_1 (a_{1n} t^n + a_{1n-1} t^{n-1} + \ldots + a_{11} t) +$$

$$\alpha_2 (a_{2n} t^n + a_{2n-1} t^{n-1} + \ldots + a_{21} t) +$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n+1} (a_{n+1n} t^n + a_{n+1n-1} t^{n-1} + \ldots + a_{n+1\,1} t) =$$

$$= 0 t^n + 0 t^{n-1} + \ldots + 0 t$$

När vi jämfora koefficienter för $t^n, t^{n-1}, \ldots, t$ i bada sidor har vi

$$\Big((a_{1n} \alpha_1 + a_{2n} \alpha_2 + \ldots + a_{n+1\,n} \alpha_{n+1}) t^n = 0 t^n \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} (a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \dots + a_{n+1\,n}\alpha_{n+1})\, t^n = 0\, t^n & \forall t \in \mathbb{R} \\ (a_{1\,n-1}\alpha_1 + a_{2\,n-1}\alpha_2 + \dots + a_{n+1\,n-1}\alpha_{n+1})\, t^{n-1} = 0\, t^{n-1} & \forall t \in \mathbb{R} \\ (a_{1\,n-2}\alpha_1 + a_{2\,n-2}\alpha_2 + \dots + a_{n+1\,n-2}\alpha_{n+1})\, t^{n-2} = 0\, t^{n-2} & \forall t \in \mathbb{R} \\ \vdots & \vdots \\ (a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \dots + a_{n+1\,1}\alpha_{n+1})\, t^1 = 0\, t^1 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Då har vi

$$\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{n+1\,n} \\ a_{1\,n-1} & a_{2n-1} & a_{3\,n-1} & & a_{n+1\,n-1} \\ a_{1\,n-2} & a_{2n-2} & a_{3n-1} & & a_{n+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & & a_{n+1\,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

n Koordinater n Koordinater n Koordinater $0 \in \mathbb{R}^n$

varje kolomner med dim = n: $A_{n\times(n+1)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Det betyder att efter gausselemination, har vi som trappstegform av A

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \tilde{a}_{n+1\,n} & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{\tilde{a}_{n+1\,1}}_{\text{fri kolumn}} & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

: det betyder att den sista kolumn är också linjärkombination av den andra (n) kolomner av $A_{n\times n+1}$

Koefficienter i den sista kolumner av $A_{n\,n\times 1}$ är precis koefficienter som definerar P_{n+1}

Då P_{n+1} är linjärkombination av $P_1, P_2, \dots P_n$ och

Då finns det oändliga möjligheter att skriva $0 = 0t^n + \dots + 0t$ som linjärkombination av $\{P_1, P_2, P_n, P_{n+1}\}$

$\mathcal{P}_n = \{ p(t) : p(t) \text{ polynom av grad} \leq n \} =$

med reella koefficienter

$$P_n = \{ p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \}$$

$$P_n = \text{Span} \{ t^n, t^{n-1}, t^{n-2}, \dots t^2, t^1, t \}$$

och $1 \leftrightarrow (1, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\qquad \{1, t, \dots t^n\} \leftrightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ Standard bas i $\mathbb{R}^{n+1}$

$t \leftrightarrow (0, 1, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\vdots$

$t^n \leftrightarrow (0, 0, \dots 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$

---

26 Låt U_1 och U_2 vara underrum i den linjära rummet V.

Visa att $U_1 \cap U_2$ och $\boxed{U_1 + U_2}$ är underrum i V

Obs $U_1 \cup U_2$ det är inte underrum i V.

Lösning Låt $u \in U_1 \cap U_2$, $v \in U_1 \cap U_2$ $\alpha \in \mathbb{R}$

? $u + v \in U_1 \cap U_2$?

? $\alpha u \in U_1 \cap U_2$?

$u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow u \in U_1$ och $u \in U_2$

$\Rightarrow$

$v \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \underline{v \in U_1}$ och $\underline{v \in U_2}$

$u + v \in U_1$ $\qquad u + v \in U_2$ eftersom U_2 är

därför att U_1 är underrum $\qquad$ också underrum

$$\Rightarrow (u + v) \in U_1 \cap U_2.$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in U_1 \cap U_2$? $\alpha u \in U_1 \cap U_2$?

$u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \underbrace{u \in U_1}$ och $u \in U_2$ $\Rightarrow$

eftersom U_1 och U_2 är underrum då

$\alpha u \in U_1$ **och** $\alpha u \in U_2$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}. \Rightarrow$

$$\alpha u \in U_1 \cap U_2.$$

Då $U_1 \cap U_2$ är underrum.

$$U_1 + U_2 = \{ u = u_1 + u_2 \ : \ u_1 \in U_1 \ , u_2 \in U_2 \}$$

$u \in U_1 + U_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2$

$v \in U_1 + U_2 \qquad v = v_1 + v_2$

$$? \ u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

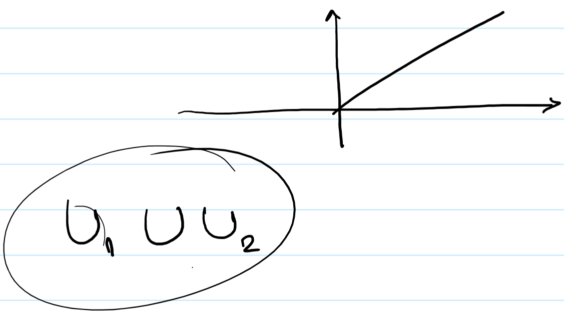
Då $u + v \in U_1 + U_2$

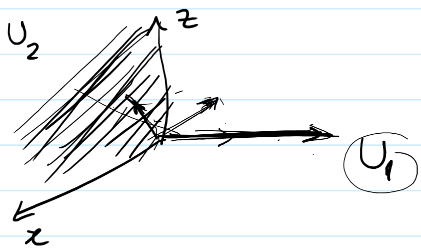
$? \ \alpha u \ ? \qquad u = u_1 + u_2 \ , \ u_1 \in U_1 \ , \ u_2 \in U_2$

$$\alpha u = \underbrace{\alpha u_1}_{\in U_1} + \underbrace{\alpha u_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2$$

Då $U_1 + U_2$ är ett underrum.

Obs: $U_1 \cup U_2$ det är inte underrum:





23 (a) $S_a = \{ \sin 2t, \cos 2t, \sin^2 t, \cos^2 t \}$ linjärt beroende.

23 (b) $S_b = \{ \ln(t^6 + 1), \ln(t^4 - t^2 + 1), \ln(t^2 + 1) \}$

23 (c) $S_c = \{ \sin(t + \alpha), \sin(t + \beta), \sin(t + \gamma), \text{ för } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$

23a) $\sin(2t) = \sin(t + t) = \sin t . \cos t + \cos t \sin t$

23a) $\sin(2t) = \sin(t+t) = \sin t . \cos t + \cos t \sin t$

$\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos t . \cos t - \sin t . \sin t$

$= \underline{\cos^2 t} - \underline{\sin^2 t}$

$\cos 2t = 1 \cos^2 t + (-1) \sin^2 t$ (linjär kombination av 2 element i sättning.

23c) $\{\sin(t+\alpha), \sin(t+\beta), \sin(t+\gamma), \underline{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}}\}$

$\sin(t+\alpha) = \sin t \overset{a_1}{\cos\alpha} + \overset{a_2}{\sin\alpha} \cos t = a_1 \sin t + a_2 \cos t$, $\underline{\forall t \in \mathbb{R}}$

$\sin(t+\beta) = \sin t \overset{b_1}{\cos\beta} + \overset{b_2}{\sin\beta} \cos t = b_1 \sin t + b_2 \cos t$

$\sin(t+\gamma) = \sin t \overset{c_1}{\cos\gamma} + \overset{c_2}{\sin\gamma} \cos t = c_1 \sin t + c_2 \cos t$

$\text{Span}\{\sin(t+\alpha)\, \sin(t+\beta), \sin(t+\gamma)\} =$

$= \text{Span}\{\sin(t), \cos t\}$ dim 2

* De 3 funktioner skapas som linjär komb av 2 funktioner.

---

23 b) $\{\ln(t^6+1), \ln(t^4-t^2+1), \ln(t^2+1)\}$ linjärt Beroende

Obs $\circledast$ $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) = 1 \ln(a) + 1 \ln(b)$ linjärt komb.

$(t^4 - t^2 + 1) \cdot (t^2+1) =$

$$\begin{array}{rrrrrr} t^6 & - t^4 & + t^2 & & \\ & + t^4 & - t^2 & +1 \\ \hline t^6 & / & / & +1 \end{array} = \underline{t^6+1}$$

$\ln(t^6+1) = \ln((t^4-t^2+1) \cdot (t^2+1)) \underset{\circledast}{=}$

$\underset{\circledast}{=} \ln(t^4-t^2+1) + \ln(t^2+1)$

---

24) Linjärt Oberoende

24) Linjärt Oberoende.

a) $S = \{ e^{t}, e^{t^2}, e^{t^3} \}$

$$\boxed{\alpha e^{t} + \beta e^{t^2} + \gamma e^{t^3} = 0}$$ (funktion 0) $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\underline{\forall t \quad 0(t) = 0}$

? $\alpha = \beta = \gamma = 0$? som unik solution ?

$$f(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{t^2} + \gamma e^{t^3} \equiv 0 \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f(t)}{e^{t^2}} = \alpha \frac{e^{t}}{e^{t^3}} + \beta \frac{e^{t^2}}{e^{t^3}} + \gamma$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{e^{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \alpha \frac{1}{e^{t^2}} + \beta \frac{1}{e^{t}} + \gamma = 0$$

$$f(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{t^2} + 0 e^{t^3} \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$