L2_V1_24_mars2021

den 24 mars 2021 13:00

Mål
- Poängtera några viktiga resultater
- Prata om några rekommenderade uppgifter.

HG §1.5 Bas och Dimension.

Definition 1.10 $V=$ Vektorrum $B=\{u_1,u_2,\dots u_n\}$

B är en bas för V om
- $\{u_1\, u_2 \dots u_n\}$ är linjärt Oberoende
- $\mathrm{Span}\{u_1,\dots u_n\} \doteq V$

- $\mathrm{Span}\{u_1,\dots u_n\} \subseteq V$ alltid.
- * $\mathrm{Span}\{u_1,\dots u_n\} \supseteq V$? Det är fråga!

  Vi måste visa att en godtyckligt vektorn $v \in V$ kan skrivas som linjärkombination av $\{u_1,\dots,u_n\}$

• Definition 1.11 $V=$ vektorrum

$\dim V = n$ = maximala antalet linjärt Oberoende vektorer i V.

• Sats 1.6
$V=$ vektorrum
V spänns upp av $\{u_1,u_2,\dots u_n\}$
$\Rightarrow$ $m>n$, $S=\{v_1,v_2,\dots v_m\}$ är linjärt **Beroende**

Obs: kanske $\dim V < n$ (Sats 1.8)

det Betyde att $V=\mathrm{Span}\{u_1,u_2,\dots u_k\}=\mathrm{Span}\{u_1,\dots u_n\}$

$\{u_1,\dots u_k\}$ linjärt Oberoende och då $\{u_1,\dots,u_n\}$ redan linjärt Beroende

$B=\{u_1,\dots,u_k\}$ bas för V

$\dim V = k < n < m$

• Sats 1.8 $V=\mathrm{Span}\{u_1,\dots u_n\}$

$\underbrace{\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\dots \tilde{u}_m\}}_{\text{efter eventuell omnumrering}}$ $m=$ det maximala antalet linjärt Oberoende vektorer bland $u_1,u_2,\dots u_n$

Då gäller att $\{\tilde{u}_1,\dots \tilde{u}_m\}$ är en bas för V

och $\dim V = m < n$

Lemma 1.3 $\quad A_{m\times n}\, x_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$ Homogena ekvationssystem

Lemma 1.3 $A_{m\times n}\, x_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$ Homogena ekvationssystem
med fler obekanta än ekvationer $(n>m)$
har alltid icke-triviala lösningar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

Trappstegform

exempel med maximal antal pivot

$$\begin{array}{l} \text{pivot } 1 \rightarrow \\ \text{pivot } 2 \rightarrow \\ \vdots \\ \text{pivot } m \rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \tilde{a}_{1\,m+1} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & * & * & \tilde{a}_{2\,m+1} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & * & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{a}_{m\,m+1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\otimes$ $\{a_1, a_2 \ldots a_m\}$ $\therefore$

m kolomner av A
är linjärt oberoende

fria kolomner
(fria parameter)
$(n-m)$ kolomner av A
som är linjärkombination
av $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

- **Sats 1.7**

V, $\dim V = n < \infty \Rightarrow$ Alla baser för V har lika många element
och
detta antal är lika med $\dim V = n$.

Sats 1.9 $\dim V = n > 0$

$\{u_1 \ldots u_m\}$ Linjärt Oberoende med $m < n$

Då kan man finna vektorer $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots u_n$

Så att $\{u_1, u_2, \ldots u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots u_n\}$ är Bas för V

OBS: Man kan komplettera en L. Oberoende sättning att skapa Bas.

Sats 1.10 • $U \subseteq V$ underrum av V, $\dim V = n < \infty$

Då $\dim U \leq \dim V = n$

• Om $\dim U = \dim V$ Då är $U = V$.

Uppgift 1.25

Antag att $\{p_1, \dots p_{n+1}\} \in \mathbb{P}_n$ uppfyller att $p_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n+1$

Visa att $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ är linjärt Beroende. $\quad B = \{1, t, \dots t^n\}$ bas till $\mathbb{P}_n$

Lösning: $p_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} t^k \quad a_{ik} \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \dots, n+1$

$\Rightarrow p_i \in H = \text{span}\{t, t^2, \dots t^n\}$, H underrum av $\mathbb{P}_n$ $\quad \dim \mathbb{P}_n = n+1$

$\{t, t^1, \dots t^n\} \subset \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ Bas för $\mathbb{P}_n \Rightarrow$

$\{t, t^1, \dots t^n\}$ är linjärt Oberoende och
är också en bas för H.
$\boxed{\dim H = n} = \# \{t, \dots, t^n\}$ (antal element)

Men nu har vi $\{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}\} \subseteq H$

sättning med $(n+1)$ element $\subseteq H$, $H = \text{span}\{t, \dots t^n\}$, $\dim H = n$

Enligt satsen 1.6 $\{p_1, p_2 \dots p_n, p_{n+1}\}$ måste vara linjärt Beroende.

$\square$

Uppgift 24 Visa att följande funktioner är linjärt Oberoende.

a) $S_a = \{e^t, e^{t^2}, e^{t^3}\}$

b) $S_b = \{\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t\}$

Lösning (a)

Fråga: ? $\alpha e^t + \beta e^{t^2} + \gamma e^{t^3} \equiv 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\alpha = \beta = \gamma = 0$ endast lösning ?
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

funktioner i S_a är linjärt Oberoende om $\alpha = \beta = \gamma = 0$ unik lösning.

$$\boxed{\alpha e^t + \beta e^{t^2} + \gamma e^{t^3} = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow}$$

$$\alpha \frac{e^t}{e^{t^3}} + \beta \frac{e^{t^2}}{e^{t^3}} + \gamma = \frac{0}{e^{t^3}} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

måste vara

$$\lim_{t \to \infty} \alpha \frac{1}{e^{t^2}} + \beta \frac{1}{e^t} + \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

Då $f(t) = \alpha e^t + \beta e^{t^2} + \gamma e^{t^3} = \alpha e^t + \beta e^{t^2}$

måste vara

Men $\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{e^{t^2}} = \lim_{t \to \infty} \alpha \frac{1}{e^t} + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

Och då $f(t) = \alpha e^t = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

måste vara

igen $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{e^t} = \lim_{t \to 0} \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

Då om $\alpha e^{t} + \beta e^{t^2} + \gamma e^{t^3} = 0$ för Alla $t \in \mathbb{R}$

Då är $\boxed{\alpha = \beta = \gamma = 0}$ endast lösning.

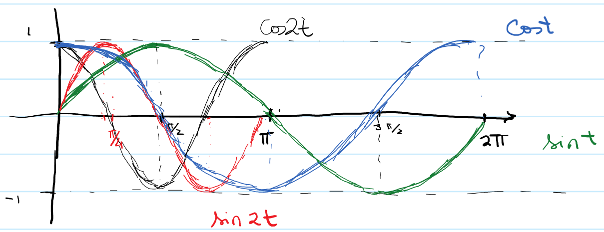
Däremot är $\{e^{t}, e^{t^2}, e^{t^3}\}$ linjärt Oberoende. $\square$

24(b) $S_b = \{\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t\}$

Lösning Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att

$$a \sin t + b \cos t + c \sin 2t + d \cos 2t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fråga: är $a = b = c = d = 0$ endast lösning för detta linjärkombination?



Vi ska spela med olika värde av t:

För $t = 0$ $\quad 0 = f(0) = a \sin(0) + b \cos(0) + c \sin(2.0) + d \cos(2.0) \Rightarrow$

$0 = 0 + b + 0 + d$

$\Rightarrow \boxed{b + d = 0}$

För $t = \pi$ $\quad 0 = f(\pi) = a \sin(\pi) + b \cos(\pi) + c \sin(2\pi) + d \cos(2\pi) \Rightarrow$

$0 = 0 \; -b + 0 + d$

$0 = -b + d$

$-b + d = 0$

$$(*) \begin{cases} b + d = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow b = d \quad 2d = 0 \Rightarrow d = 0, \; b = 0$$

$\boxed{\text{Då } b = d = 0}$

För $t = \pi/2$ $\quad 0 = f(\pi/2) = a \sin \pi/2 + b \cos(\pi/2) + c \sin(\cancel{2} \cdot \pi/\cancel{2}) + d \cos(\cancel{2}\pi/\cancel{2})$

$0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot (0) + d(-1)$

$\Rightarrow a - d = 0$

För $t = 3\pi/2$ $\quad 0 = f(3\pi/2) = a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + b \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c \sin\left(\cancel{2} \frac{3\pi}{\cancel{2}}\right) + d \cos\left(\cancel{2} \cdot \frac{3\pi}{\cancel{2}}\right)$

$0 = -a + 0 \cdot b + 0 \cdot c - d$

$$\begin{cases} a - d = 0 \\ -a - d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = d \quad -d - d = -2d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0} \quad \boxed{a = 0}$$

Då $\boxed{a = b = c = d = 0 \text{ endast möjlighet.}}$

Då är $S_b = \{\sin t, \cos t, \sin(2t), \cos(2t)\}$ linjärt Oberoende

Uppgift 13a) Visa att.

Om M är en affin mängd i $\mathbb{R}^n$ och $x \in M$, $y \in M$, $x \neq y$.
Då innehåller M linjen genom x och y.
d.v.s $(x + t(y-x)) \in M$.

Lösning. M affin mängd i $\mathbb{R}^n$

$M = \{ x = p + u : p \in \mathbb{R}^n, u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, U \equiv \text{underrum av } \mathbb{R}^n \}$

$x \neq y$, $x \in M$ & $y \in M$.

$\left.\begin{array}{l} x = p + u_1 \\ - y = p + u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y - x = (p + u_2) - (p + u_1) = (u_2 - u_1) \in U$

U underrum

Då $\boxed{t(u_2 - u_1) \in U, \forall t \in \mathbb{R}.}$

När vi tar addition of $x \in M$ med $t(u_2 - u_1) \in U$, har vi

$z = x + t(u_2 - u_1) = (p + u_1) + t(u_2 - u_1)$

$z = p + \underbrace{(1-t)u_1 + t u_2}_{\in U} \Rightarrow z \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$

När $t = 0 \Rightarrow z = p + (1-0)u_1 + 0u_2 = p + u_1 = x$

$t = 1 \Rightarrow z = p + (1-1)u_1 + 1u_2 = p + u_2 = y$

Då linjen mellan x och $y \in M$:

$z = p + u_1 - tu_1 + tu_2 = (p + u_1) + t(u_2 - u_1)$

$z = (x) + t(y - x)$

$\square$.

Uppgift 13.b (Fundera på det till måndag. Då diskuterar vi om det)

Uppgift 12 sidan 45.

Bestäm på formen $\frac{A}{E}x_1 + \frac{B}{E}x_2 + \frac{C}{E}x_3 + \frac{D}{E}x_4 + \frac{E}{E} = 0$ ekvationen för den affina mängd i $\mathbb{R}^4$ som går genom punkterna $P_0 = (1,1,1,1)$ $P_1 = (2,3,2,2)$ $P_2 = (4,5,4,6)$ $P_3 = (0,1,3,4)$

$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{E \neq 0} \\ E = 0 \Rightarrow \text{Homogena ekvations system.} \end{array} \right.$

Lösning: $\left\{ \begin{array}{l} E = 0 \Rightarrow \text{skapa Homogena system} \\ E \neq 0 \Rightarrow \tilde{A}x_1 + \tilde{B}x_2 + \tilde{C}x_3 + \tilde{D}x_4 + 1 = 0 \end{array} \right.$

$P_i \in \mathbb{R}^4$

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$

1) Börja med.

Förslag: Antag $\boxed{E = -1}$ $\Rightarrow$ Skapa en ekvationssystem att hitta A, B, C, D

2) Vad Händer när man tar E = ett andra tal ?

$\tilde{A} = \frac{A}{E}$

$\vdots$

$\tilde{D} = \frac{D}{E}$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1) + B(1) + C(1) + D(1) = 1 \\ A(2) + B(3) + C(2) + D(2) = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} A(2) + B(3) + C(2) + D(2) = 1 \\ A(4) + B(5) + C(4) + D(6) = 1 \\ A(0) + B(1) + C(3) + D(4) = 1 \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\4\\0\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}1\\3\\5\\1\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix} + D\begin{pmatrix}1\\2\\6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad M\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

Gausselimination.
Elementära Radoperationer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

pivot
$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1$
$R_4 \leftarrow$ Redo.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$
pivot
$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$
$R_4 \leftarrow R_4 - R_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3/3 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \text{ Pivot} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$
Pivot

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-4/3 & 2-2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{3}R_4$
R_2 redo
$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{4}{3}R_4$
pivot

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/3 + 1/3(-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 + 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} A &= 3/3 = 1 \\ B &= -1 \\ C &= 6/3 = 2 \\ D &= -1 \end{aligned}$$

Då har vi $1x_1 + (-1)x_2 + 2x_3 - 1x_4 = 1$ $(E = -1)$

$$\boxed{1x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = 0}$$

Ekvation för den affina mängden i $\mathbb{R}^4$ som går genom P_0, P_1, P_2, P_3.

Obs: $x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 1x_2 - 2x_3 + 1x_4 \\ x_2 &= 0 + 1x_2 \\ x_3 &= 0 \qquad + 1x_3 \\ x_4 &= 0 \qquad + 1x_4 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \overset{t}{\cancel{x_2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \overset{s}{\cancel{x_3}}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \overset{k}{\cancel{x_4}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad t, s, k \in \mathbb{R}$$

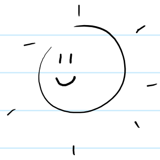
fria parameter.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

fria parameter.

p

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



Trevlig Helg!