L3_V2_29_mars_alice

den 29 mars 2021 11:53

Definition 1.3 sidan 9

En delmängd M till V kallas affin, om det finns en vektor $u_0 \in V$ och ett underrum U av V så att

$$\underline{M = u_0 \oplus U = \{ u_0 + u : u \in U \}}$$

Uppgift 13b.

Visa att

om M är en delmängd av $\mathbb{R}^n$ med egenskapen:

[$x, y \in M$, $x \neq y \Rightarrow$ linjen genom x och y ligger i M

Så är M en affin mängd.

Lösning: [Vi behöver hitta en punkt $a \in M$ och ett underrum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ så att $M = \{ a + u : u \in U \}$

Tag $a \in M$.

och Definera $W_a = \{ m - a ; m \in M \}$

Vi ska visa att $W_a \subseteq \mathbb{R}^n$ är ett underrum

- $\tilde{x}, \tilde{y} \in W_a \Rightarrow \tilde{x} + \tilde{y} \in W_a$
- $\alpha \in \mathbb{R}, \tilde{x} \in W_a \Rightarrow \alpha \tilde{x} \in W_a$

$\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in W_a, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Bevis: $\tilde{x} \in W_a : \tilde{x} = x - a , x \in M$

$\tilde{y} \in W_a : \tilde{y} = y - a , y \in M$

Enligt egenskapen : $\forall s, t \in \mathbb{R}$

linjen $f(s) = (1-s)a + sx \in M$.

linjen $g(t) = (1-t)a + sy \in M$.

i) Sätt $s = \alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(\alpha) = (1-\alpha)a + \alpha x = a - \alpha a + \alpha x = a + \alpha(x-a)$$

$f(\alpha) = a + \alpha(x-a) \in M$ och

$$\underbrace{f(\alpha) - a}_{\in W_a} = \alpha(x-a) = \alpha\tilde{x} \Rightarrow \underline{\alpha\tilde{x} \in W_a.}$$

ii) Sätt $s = t = 2 \in \mathbb{R}$.

$f(2) = (1-2)a + 2x \in M \Rightarrow f(2) = -a + 2x \in M$

$g(2) = (1-2)a + 2y \in M \Rightarrow g(2) = -a + 2y \in M$

och enligt hypotes ligger linjen mellan f(2) och g(2) i M.

då $\frac{f(z)+g(z)}{2} \in M.$

$$\underbrace{\frac{f(z)+g(z)}{2}} = \frac{-2a + 2x+2y}{2} \in M$$

Och enligt definitionen av W_a.

$$\frac{f(z)+g(z)}{2} - a \in W_a \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{f(z)+g(z)}{2}} - a = \frac{-2a + 2x+2y - 2a}{2} = \frac{2(x+y)-4a}{2}$$

$$= (x+y) - 2a$$

$$= \underbrace{(x-a)} + (y-a) = \tilde{x} + \tilde{y}$$

Då $\underline{\tilde{x}+\tilde{y}} \in W_a$, $\forall\ \tilde{x}, \tilde{y} \in W_a$.

Då är W_a ett underrum

Och däremot $M = \{ x = a + \tilde{x} : \tilde{x} \in \underline{W_a} \}$ $\square$.

Uppgift 22 sidan 46

a) Vad är dimensionen av det linjära rummet $\mathbb{R}^{n\times n}$ av alla $n\times n$ matriser?

Lösning

$n=1$ $\mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}^1 = \{ [a_{11}] : a_{11} \in \mathbb{R} \}$ $\mathbb{R}^{1\times 1} = \text{span}\{[1]\}$, $\dim \mathbb{R}^{1\times 1} = 1$

$n=2$ $\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\{ \underbrace{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} : a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix} \right\}$

Bas $\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \right\}$ $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = \#\text{ Bas} = 4.$

Och det är precis antal element i matrisen.

$n=3$ $\mathbb{R}^{3\times 3} = \left\{ A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & \cdots & a_{23} \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} i = 1 \ldots 3 \\ j = 1 \ldots 3 \end{matrix} \right\}$

Då $B = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right\}$ $\# B = 3\times 3 = 3^2 = 9$
och $\dim \mathbb{R}^{3\times 3} = 9$.

Då $B = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right\}$ $\# B = 3 \times 3 = 3^2 = 9$ och $\dim \mathbb{R}^{3\times 3} = 9$.

med induktion argument

n $\mathbb{R}^{n\times n} = \left\{ A_{n\times n} = [a_{ij}] : a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n \right\}$

Bas $B = \left\{ a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}, \dots, a_{nn} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\# B = n \times n = n^2$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Span } B = \mathbb{R}^{n\times n} \\ B \text{ är linjärt Oberoende.} \end{array} \right.$

Då $\dim \mathbb{R}^{n\times n} = n^2$.

Obs $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ n element i linje 1, n element i linje 2, n element i linjen n $\Big\}$ $\underbrace{n + \dots + n}_{n \text{ gånger}} = n \times n = n^2$.

$\mathbb{R}^{n^2} \leftrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$

22 b) Vad är dimensionen av underrummet av symmetriska matriser i $\mathbb{R}^{n\times n}$?

$U \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ $U = \left\{ A_{n\times n} : a_{ij} = a_{ji},\ i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n \right\}$

$= \left\{ A_{n\times n} : \boxed{A = A^T} \right\}$

$\left\{ \begin{array}{l} A, B \in U \overset{?}{\Rightarrow} (A+B) \in U \\ A \in U, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha A) \in U \end{array} \right.$

$\begin{array}{l} A = A^T \\ B = B^T \end{array} \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T = (A+B)$

$(\alpha A)^T = \alpha (A^T) = \alpha A$

$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} n \\ n-1 \\ n-2 \\ 2 \\ 1 \end{array}$

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\ \hline \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ gånger}} \end{array}$$

Då $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Då Bas för U har $\dfrac{n(n+1)}{2}$ element

$\# \text{Bas} = \dim U$, $U = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} / A = A^T \}$

$$\dim U = \frac{n(n+1)}{2}$$

22c) De Skevsymmetriska matriserna : $\boxed{A^T = -A}$

Visa att $U \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, $U = \{ A_{n\times n} / A^T = -A \}$ bildar ett underrum i $\mathbb{R}^{n\times n}$ och bestäm $\dim U$.

Lösning:

Låt $A, B \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$ godtyckliga.

i) $(A+B)^T = A^T + B^T \underset{*}{=} -A + (-B) = -(A+B)$, $\forall A, B \in U$.

$* \; A \in U$, $B \in U$

ii) $(\alpha A)^T = \alpha (A^T) \underset{*}{=} \alpha(-A) = -(\alpha A)$ Då $(\alpha A) \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall A \in U$.

$* \; A \in U$

Då är U ett underrum.

$A^T = -A$

1) $n = 2$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_{11} = -a_{11} \\ a_{22} = -a_{22} \end{cases} \qquad a_{21} = -a_{12} \qquad a_{12} = -a_{21} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_{11} = 0 \\ 2a_{22} = 0 \\ a_{21} + a_{12} = 0 \\ a_{12} + a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{12} = -a_{21}$$

$$A \in U \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ $A_{n \times n} \in U$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A^T} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$2a_{ii} = 0$ $i = 1 \ldots n$

$a_{ij} + a_{ji} = 0 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$

Då från antalet av symmetriska matrisen, behöver vi exkludera alla element motsvarande till diagonal.

$\# B_{sym} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\quad \# B_{skev} = \# B_{syn} - \#$ Diagonal

Då:

$$\frac{(n)(n+1)}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\frac{(n)(n+1)}{2} - n = \frac{n^2+n-2n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Uppgift 8 $\quad P_n = \{ p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 : a_i \in \mathbb{R},\ i = n, n-1, \dots 1, 0 \}$

a) $p(t) = at^2$ med $a \in \mathbb{R}$

$$U = \{ p(t) \in P_n : p(t) = a.t^2,\ a \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R} \}$$

Att visa att U är ett underrum behöver vi ta $p, q \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$ godtyckliga. och visa att $p+q \in U$, $\alpha p \in U$

i) $p \in U \Rightarrow p = at^2$. $a \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$
$q \in U \Rightarrow q = bt^2$, $b \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$(p+q)(t) = p(t) + q(t) = \underbrace{at^2 + bt^2} = (a+b)t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
$(a+b) \in \mathbb{R}$

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$
$p \in U$

$$(\alpha p)(t) = \alpha(p(t)) = \alpha(at^2) = (\alpha a)t^2 \in U$$
$\alpha a \in \mathbb{R}$

$p+q \in U$, $\alpha p \in U$ Då är U underrum. $\square$

Då är U underrum.

b) $p(t) = a + 1.t^2$, $a \in \mathbb{R}$ $\quad S = \{ p(t) \in P_n / p(t) = a + 1t^2,\ a \in \mathbb{R} \}$

$q(t) = b + 1t^2$, $b \in \mathbb{R}$

$$p(t) + q(t) = (a+b) + (t^2) + (t^2) = (a+b) + 2t^2 \notin \alpha + 1t^2$$

S är ej underrum $\quad p+q \notin S$, med $p \in S$
$q \in S$.

c) $p(0)=0 \qquad S=\{p\in \mathbb{P}_n \,/\, p(0)=0\}$ ✓

d) $2p(0)=p(1)$?

$p(0)=\frac{1}{2}p(1)$

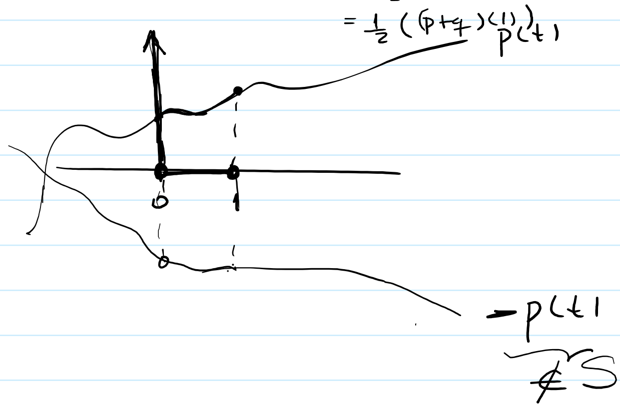
$q(0)=\frac{1}{2}(q(1))$

$(p+q)(0)=p(0)+q(0)=\frac{1}{2}p(1)+\frac{1}{2}q(1)=$

$=\frac{1}{2}(p(1)+q(1))=$

$=\frac{1}{2}((p+q)(1))$

e) $S=\{p(t)\geq 0$ då $0\leq t\leq 1\}$



$\alpha p(t)\leq 0$

$\alpha<0$

f) ?

g) $S=\{p(t)\in \mathbb{P}_n \,/\, p(t)=a_nt^n+\dots+a_1t+a_0,\ \ \overbrace{a_i\in\mathbb{Z}}^{\text{heltal.}}\}$

$i=0,\dots n$

$\pi p(t)=a_n\pi t^n+\dots+a_1\pi t+\pi a_0$

$\pi a_i\notin\mathbb{Z}.$

---

9) $V=\mathbb{R}^4 \qquad x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$

f) $S=\{x\in\mathbb{R}^4 : x_1\cdot x_3=0\}$

$y=(a,b,c,d)$

$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$(a+x_1,\ b+x_2,\ c+x_3,\ d+x_4)$

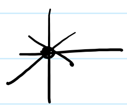
$(a+x_1)\cdot(c+x_3)=\overset{=0}{a\cdot c}+a x_3+x_1\cdot c+\overset{=0}{x_1 x_3}$

??

$y\in S \qquad a.c=0$

$x\in S \qquad x_1\cdot x_3=0$

$x_1^2+x_2^2=0$



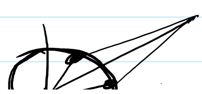
$y=(a,b,c,d)\in S,\quad x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$a.c=0 \Rightarrow a=0$ eller $c=0$

$x_1x_3=0 \Rightarrow x_1=0$ eller $x_3=0$

Välja $\quad y=(0,b,c,d)\quad x=(x_1,x_2,0,x_4)$

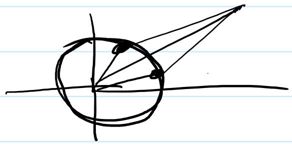
$(y+x)=(0+x_1,\ b+x_2,\ c+0,\ d+x_4)$



och $\quad(0+x_1)\cdot(c+0)=0c+0+x_1c+0x_1$

$x^2+x^2 \dots$

$x_1^2 + x_2^2 = 1$



$(y+x) = (0+x_1, b+x_2, c+0, d+x_4)$

och $(0+x_1)\cdot(c+0) = 0c + 0 + x_1 c + 0x_1$
$= x_1 c \neq 0$

med $x \in S$, $y \in S$.

Då $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 \cdot x_3 = 0\}$
är ej underrum.