Ö3_V2_mars29_alice

den 29 mars 2021 11:56

Uppgift 18 a sidan 45

Bestäm dimensionen av den underrum i $\mathbb{R}^4$ som genereras av vektorerna

a) $\underbrace{(1,1,1,1)}_{v_1}$, $\underbrace{(4,2,-2,-3)}_{v_2}$, $\underbrace{(3,1,-3,-4)}_{v_3}$

Lösning.
$$S = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{ w \in \mathbb{R}^4 : w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

? $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ är en bas till S?

- Span $\{v_1, v_2, v_3\}$ ✓
- $\{v_1, v_2, v_3\}$ är linjärt Oberoende ?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gausselimination.
RE-operation.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow -\frac{1}{2} R_2 \\ R_3 \leftarrow -\frac{1}{6} R_3 \\ R_4 \leftarrow -\frac{1}{4} R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - 4R_2 \\ \text{Pivot} \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-4(1) & 0-4(0) \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$1\alpha + 0\beta - 1\gamma = 0 \Longrightarrow$
$0\alpha + 1\beta + 1\gamma = 0$

$\alpha = \gamma$
$\beta = -\gamma$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{\gamma} \\ -\cancel{\gamma} \\ \cancel{\gamma} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$-1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + 1 \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

Så: v_3 är linjär kombination av v_1 och v_2 $\Longrightarrow$

$$\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Span}\{v_1, v_2\} = S$$

Med Gausselimination, vet vi att $\{v_1, v_2\}$ är linjärt Oberoende
Då $\{v_1, v_2\}$ är bas till S

Då $\dim S = 2 = \#$ Bas

$$v_3 = \underbrace{-1 v_1 + 1 v_2}$$

$$S = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \,;\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma(\overbrace{-1v_1 + 1v_2}^{v_3}) = (\alpha - \gamma) v_1 + (\beta + \gamma) v_2 =$$

$$= a v_1 + b v_2$$

$$S = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Span}\{v_1, v_2\}$$

18c) $\{\underbrace{(1,2,1,2)}_{v_1}\ \underbrace{(2,1\,2,1)}_{v_2}\ \underbrace{(1,2,2,1)}_{v_3}\}$

$$S = \text{span}\{v_1\ v_2\ v_3\}$$

$\dim S = ?$? $\{v_1\ v_2\ v_3\}$ är bas till S?

? är $\{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt Oberoende?

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$? har unik lösning $\alpha = \beta = \gamma = 0$?

Pivot

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gausselimination
RE-operation.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ (R_2 = -\frac{1}{3} R_2)\ \text{Pivot} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right)
\quad
\begin{array}{l}
R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \\
\\
\text{Pivot} \\
R_4 \leftarrow R_4 + R_3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}
\end{array}\right)
\Rightarrow
\begin{array}{l}
1\alpha = 0 \\
1\beta = 0 \\
1\gamma = 0
\end{array}
$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ är unik lösning. Då $\{v_1, v_2, v_3\}$ är linjärt Oberoende.

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$ är en bas till S.

$\# B = \dim S = 3$

---

(21) sidan 46

$\{v_1, v_2, \dots v_K\}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt Oberoende.

? Vad är $\dim S$, $S = \operatorname{span}\{\underbrace{(v_1 - v_2)}_{\vec{w}_1}, \underbrace{(v_2 - v_3)}_{\vec{w}_2}, \dots \underbrace{(v_{K-1} - v_K)}_{\vec{w}_{K-1}}, \underbrace{(v_K - v_1)}_{\vec{w}_K}\}$

Lösning ①

1°) $\{w_1, w_2, \dots w_K\}$ är linjärt Oberoende ?

$w_1 = (v_1 - v_2) \quad \longrightarrow \quad w_1 + w_2 = (v_1 - \cancel{v_2}) + (\cancel{v_2} - v_3) = v_1 - \cancel{v_2} + \cancel{v_2} - v_3 = v_1 - v_3$

$w_2 = (v_2 - v_3)$

$w_3 = v_3 - v_4 \quad \longrightarrow \quad (w_1 + w_2) + w_3 = (v_1 - v_3) + (v_3 - v_4) = v_1 - v_4$

$\vdots$

$w_{K-1} = v_{K-1} - v_K \quad \longrightarrow \quad w_1 + w_2 + \dots + w_{K-1} = v_1 - v_K = -(\underbrace{v_K - v_1}_{w_K})$

$\underbrace{(v_1 - \cancel{v_2}) + (\cancel{v_2} - \cancel{v_3}) + (\cancel{v_3} - \cancel{v_4}) + \dots / (\cancel{v_{K-1}} - v_K)}_{} \; v_1 - v_K = -(\underbrace{v_K - v_1}_{w_K})$

Då $\quad w_1 + w_2 + \dots + w_{K-1} = -w_K$

$\operatorname{Span}\{w_1, w_2, \dots, w_{K-1}, w_K\} = \operatorname{Span}\{w_1, w_2, \dots w_{K-1}\}$

Nu frågan är : Är $\{w_1, w_2, \dots w_{K-1}\}$ linjärt Oberoende ?

$\{(v_1 - v_2), (v_2 - v_3), \dots, (v_{K-1} - v_K)\}$

$\alpha_1 (w_1) + \dots + \alpha_{K-1}(w_{K-1}) = 0 \quad ? \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{K-1} = 0$ som endast lösning ?

$\alpha_1(w_1) + \dots + \alpha_{k-1}(w_{k-1}) = 0$? $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$ som endast lösning ?

$$\alpha_1(v_1 - v_2) + \alpha_2(v_2 - v_3) + \dots + \alpha_{k-1}(v_{k-1} - v_k) = 0$$

$$\alpha_1 v_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)v_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)v_3 + \dots (\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2})v_{k-1} - \alpha_{k-1} v_k = 0$$

Som $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$ är linjärt Oberoende (Hypotes)

Då har vi att:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 & \Longrightarrow \boxed{\alpha_1 = 0} \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 0 & \Longrightarrow \alpha_2 - 0 = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha_2 = 0} \\ \alpha_3 - \alpha_2 = 0 & \Longrightarrow \boxed{\alpha_3 = 0} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{k-1} - \alpha_{k-2} = 0 & \boxed{\alpha_{k-1} = 0} \\ -\alpha_{k-1} = 0 & \boxed{\alpha_{k-1} = 0} \end{cases}$$

unik lösning

Det betyder att $\{\underbrace{(v_1 - v_2)}_{w_1}, \underbrace{(v_2 - v_3)}_{w_2}, \dots, \underbrace{(v_{k-1} - v_k)}_{w_{k-1}}\}$ är

linjärt Oberoende.

Däremot
$$\begin{cases} \text{Span}\{(v_1 - v_2) \dots (v_{k-1} - v_k)\} = S \\ B = \{v_1 - v_2, \dots, (v_{k-1} - v_k)\} \text{ L. Ob.} \end{cases}$$

B är bas till S

$$\#B = (\underline{k-1}) = \dim S = \text{Span}\{(v_1 - v_2), \dots (v_{k-1} - v_k)\}$$

---

43 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbildning.

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 0x_3, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

a) Visa att T är linjär

b) Visa att N(T) är en rätt linje (bestäm dess ekvation)

c) Visa att $V(T)$ är ett plan ″

d) Bestäm alla urbilder till $(3,2,1)$ och $(2,1,3)$

Bevis:

a) T är linjär av. om $\begin{cases} T(u+v) = T(u)+T(v) & ,\forall u,v \in \mathbb{R}^3 \\ T(\alpha u) = \alpha T(u) & ,\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ v=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \end{array}\right\rangle u+v = \underbrace{(x+a,\ y+b,\ z+c)} \in \mathbb{R}^3$$

$$T(u+v) = \big((x+a) - (y+b) + 2(z+c),\ 2(x+a) + (y+b) + 0,\ -(x+a) - 2(y+b) + 2(z+c) \big) =$$

$$= \Big((x-y+2z) + (a-b+2c),\ (2x+y) + (2a+b),\ (-x-2y+2z) + (-a-2b+2c) \Big)$$

$$= (x-y+2z,\ 2x+y,\ -x-2y+2z) + (a-b+2c,\ 2a+b,\ -a-2b+2c)$$

$$= T(u) + T(v)$$

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$T(\alpha u) = \big(2(\alpha x) - (\alpha y) + 2(\alpha z),\ 2(\alpha x) + (\alpha y),\ -(\alpha x) - 2(\alpha y) + 2(\alpha z) \big) =$$

$$(\alpha(2x-y+2z),\ \alpha(2x+y),\ \alpha(-x-2y+2z))$$

$$= \alpha(\ \_\ \ \_\ \ .\ ) = \alpha T(u).$$

Då är T linjär avbildning.

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^3 \quad \bar{u} = (x,y,z) = \underbrace{x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3}$

$$T(\vec{u}) = T(x,y,z) = T(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \overset{T \text{ är linjär}}{=}$$

$$x\,T(\bar{e}_1) + y\,T(\bar{e}_2) + z\,T(\bar{e}_3) = \underbrace{T(x,y,z)}$$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{T(\bar{e}_1)} & \underbrace{T(\bar{e}_2)} & \underbrace{T(\bar{e}_3)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$T(\bar{e}_1) = (1 - 0 + 20,\ 2(1) + 0,\ -1 - 2(0) + 0) = (1, 2, -1)$$

$$T(\bar{e}_2) = (0 - \underbrace{1} + 2(0),\ 2(0) + 1,\ -0 - 2(1) + 2(0)) = (-1, 1, -2)$$

$$T(\bar{e}_3) = (2(1),\ 0,\ -0 + 0 + 2(1)) = (2, 0, 2)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y + 2z \\ 2x + y + 0 \\ -1x - 2y + 2z \end{bmatrix}$$

$$T(u) = A_{3\times3}[u]_{3\times1}$$

b) $\underbrace{N(T)} = ?$ $\quad N(T) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \,/\, Ax = 0 \} = \{ u \in \mathbb{R}^3 \,/\, T(u) = 0 \}$

c) $V(T) = ?$ $\quad V(T) = \text{Span}\{T(\bar{e}_1), T(\bar{e}_2), T(\bar{e}_3)\} = \text{Span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$

Kolumner av A.

d) $w_1 = (3, 2, 1)$ $\quad w_2 = (2, 1, 3)$ $\quad$? $A x = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$? , $Ax = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$, $x = ?$?

? $w_1 \in V(T)$ $\quad w_2 \in V(T)$?

Då ska vi använda $[A \,|\, 0 \,|\, w_1 \,|\, w_2]$, och gausselimination.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ \end{array}\qquad Ax = w_1 \qquad Ax = w_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{Pivot} \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + \tfrac{1}{3}R_2 \\ \text{Pivot} \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 2 + \frac{1}{3}(-4) & 0 & 3 + \frac{1}{3}(-4) & 2 + \frac{1}{3}(-3) \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 2/3 & 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 & -4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

fri kolomn $\qquad w_1$

$w_2 \notin V(T)$ Det finns inge $x \in \mathbb{R}^3$ så att $Ax = w_2$.

fri kolumn $\qquad w_1 \qquad$ så att $Ax \overset{?}{=} w_2$.

$$\frac{2}{3}k_1 - \frac{4}{3}k_2 = k_3$$

$$\text{Bas till } V(T) = \{ \underbrace{k_1, k_2}_{\text{från } A} \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$